Maria Dinescu
Ivanca Olivotto
Rosa Gruia

MATEMATICĂ

pentru candidații la examenele de admitere în licee

Editura didactică și pedagogică
București – 1970

Maria Dinescu
Ivanca Olivotto
Rosa Gruia

Matematică

pentru candidații la examenele de admitere în licee

Editura didactică și pedagogică
București — 1970

ARITMETICĂ ȘI ALGEBRĂ

I
Numere raționale

Mulțimi

În acest capitol vom prezenta mai întîi cîteva noțiuni de teoria mulțimilor cunoscute din școala generală.

Noțiunea de *mulțime* este o noțiune primară, ea nu se definește și are sens de colecție sau grămadă de obiecte.

Mulțimile se notează de obicei cu litere mari ale alfabetului: A, B, ..., M, N,...

Elementele mulțimii A, obiectele care fac parte din mulțimea A, se notează de obicei cu litere mici ale alfabetului: a, b, ..., m, n, ...

Vom nota $a \in A$ dacă elementul a aparține mulțimii A.

Vom nota $a \notin A$ dacă elementul a nu aparține mulțimii A.

Mulțimea A poate fi dată prin enumerarea elementelor care alcătuiesc mulțimea și se notează scriind elementele într-o acoladă: $\{a,b,c\}$ sau prin enunțarea unei proprietăți pe care o au toate elementele mulțimii și numai aceste elemente.

Exemplu. Mulțimea paralelogramelor este mulțimea patrulaterelor care au laturile opuse paralele.

Mulțime vidă este mulțimea care nu are nici un element; se notează $\varnothing$.

Exemplu. În biblioteca școlii noastre nu există cărți în limba arabă deci, mulțimea cărților în limba arabă din biblioteca noastră este mulțimea vidă.

Incluziune. Dacă fiecare element al mulțimii A aparține mulțimii B spunem că mulțimea A este inclusă în mulțimea B sau mulțimea B include mulțimea A și se notează $A \subset B$ sau $B \supset A$.

Exemplu. Mulțimea paralelogramelor include mulțimea romburilor (orice romb este paralelogram).

Mulțimi egale. Dacă fiecare element al mulțimii A aparține mulțimii B și fiecare element al mulțimii B aparține și mulțimii A ($A \subset B$ și $B \subset A$) atunci cele două mulțimi sînt egale. Scriem $A = B$.

Operații cu mulțimi. *Reuniunea* a două mulțimi A și B este mulțimea tuturor elementelor care aparțin cel puțin uneia din cele două mulțimi și se notează

$$A \cup B.$$

Exemplu. Fie mulțimile $A = \{a,b\}$ și $B = \{c,d\}$.

$$\{a,b\} \cup \{c,d\} = \{a,b,c,d\}.$$

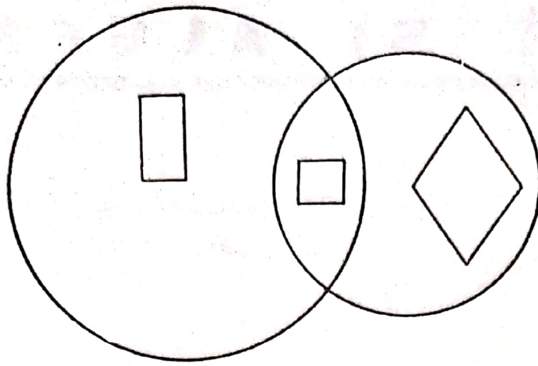


Fig. 1

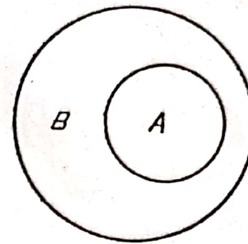


Fig. 2

Intersecția a două mulțimi A și B este mulțimea elementelor comune celor două mulțimi (care aparțin atît mulțimii A cît și mulțimii B) și se notează

$$A \cap B.$$

Exemplu. Intersecția dintre mulțimea dreptunghiurilor și mulțimea romburilor este mulțimea pătratelor (fig. 1).

Mulțimi disjuncte sînt mulțimile care nu au elemente comune (intersecția lor este mulțimea vidă).

Exemplu. $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \varnothing$.

Observări. 1) Reuniunea unei mulțimi A cu o mulțime B care o include este mulțimea B (fig. 2).

Dacă $A \subset B$, atunci $A \cup B = B$.

2) Intersecția unei mulțimi A cu o mulțime B care o include este mulțimea A.
Dacă $A \subset B$, atunci $A \cap B = A$.

3) Dacă mulțimile A și B nu sînt disjuncte ($A \cap B = C \neq \varnothing$), atunci reuniunea $A \cup B$ cuprinde elementele necomune din A și B și elementele comune.

Exemplu. Elevii a,b,c au media 10 la limba română, elevii a,b,d,e,f au media 10 la matematică.

Mulțimea elevilor cu media 10 la limba română sau la matematică este reuniunea celor două mulțimi.

$$\{a,b,c\} \cup \{a,b,d,e,f\} = \{a,b,c,d,e,f\}.$$

4) $A \cup \varnothing = A$. Reuniunea unei mulțimi A cu mulțimea vidă este mulțimea A.

5) $A \cap \varnothing = \varnothing$. Intersecția unei mulțimi A cu mulțimea vidă este mulțimea vidă.

Proprietăți.

Reuniunea mulțimilor este comutativă și asociativă.

$$A \cup B = B \cup A; \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Intersecția mulțimilor este comutativă și asociativă.

$$A \cap B = B \cap A; \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Reuniunea este distributivă față de intersecție și intersecția este distributivă față de reuniune.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Corespondență biunivocă. Fie A și B două mulțimi. Presupunem că fiecărui element din mulțimea A îi corespunde un singur element în mulțimea B și reciproc. Dacă

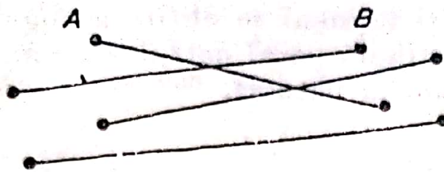


Fig. 3

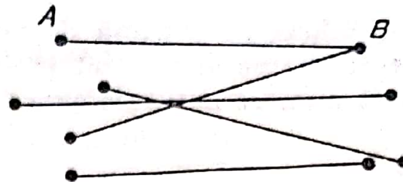


Fig. 4

la elemente diferite din mulțimea A corespund elemente diferite în mulțimea B și reciproc, spunem că între mulțimile A și B s-a realizat o *corespondență biunivocă* (fig. 3).

Cele două mulțimi reprezentate în figura 4 nu sînt în corespondență biunivocă.

Dacă într-o sală de cinematograf fiecare spectator ocupă un singur loc și fiecare loc este ocupat de un spectator, atunci între mulțimea spectatorilor și mulțimea locurilor există o corespondență biunivocă.

Funcții. Fie E și F două mulțimi. Dacă fiecărui element al mulțimii E facem să-i corespundă un element din mulțimea F și numai unul, spunem că am definit o *funcție* pe E cu valori în F.

Mulțimea E se numește *domeniul de definiție* (de existență) al funcției iar F, *mulțimea în care funcția ia valori.*

O funcție se notează de obicei cu o literă: $f, g, h, \ldots$ Dacă elementului $a \in E$ îi corespunde prin funcția f elementul $b \in F$, spunem că b este *imaginea lui a* prin funcția dată și scriem $b = f(a)$.

Exemplu. Latura unui pătrat avînd lungimea x, perimetrul este $4x$. Vom spune că perimetrul este funcție de lungimea laturii. Pentru această funcție $E = (0, +\infty)$ și $F = (0, +\infty)$.

Numere naturale

Mulțimile echivalente de obiecte (mulțimi între care s-a stabilit o corespondență biunivocă) sînt caracterizate de același număr — numărul obiectelor care aparțin fiecărei mulțimi.

De exemplu: 5 elevi, 5 creioane, 5 flori, 5 litere, 5 substantive etc. sînt mulțimi echivalente; caracteristica lor comună este numărul 5.

Mulțimile care conțin cîte un singur element sînt mulțimi echivalente, lor le corespunde numărul 1 (unu).

Dacă fiecărei mulțimi de un element îi adăugăm cîte un element, se obțin mulțimi echivalente de cîte două elemente. Lor le corespunde numărul 2 (doi) etc. Mulțimea vidă are 0 (zero) elemente.

Numerele 1,2,3,4,... se numesc *numere naturale*, primul număr natural este 1, el are un succesor (numărul 2). Fiecare număr natural are un succesor obținut adăugînd acelui număr o unitate, putem deci forma un număr natural oricît de mare vrem.

Numerele 1,2,3,4... formează un șir, șirul numerelor naturale (întregi pozitive); șirul numerelor naturale este nesfîrșit.

Dacă la șirul numerelor naturale adăugăm și numărul 0 (zero) avem șirul lărgit al numerelor naturale:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Operații cu numere naturale

Adunarea. Suma a două numere naturale a și b este numărul elementelor obținute prin reuniunea a două *mulțimi disjuncte* care au a respectiv b elemente și se notează $a + b$. Operația prin care se obține numărul $a + b$ se numește adunare, iar numerele

a şi b termenii adunării. O sumă de mai mulţi termeni se obţine adăugînd la suma primilor doi termeni pe al treilea, la suma obţinută pe al patrulea ş.a.m.d.
Suma a două numere naturale este tot un număr natural.

Proprietăţi

Adunarea numerelor naturale este o operaţie comutativă:

1. $$a + b = b + a.$$

Suma nu se schimbă cînd schimbăm ordinea termenilor

Exemplu. $3 + 5 = 5 + 3$.

Adunarea numerelor naturale este o operaţie asociativă

2. $$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Suma nu se schimbă cînd înlocuim doi sau mai mulţi termeni cu suma lor.

Exemple: $(3 + 6) + 4 = 3 + (6 + 4)$, $2 + 5 + 3 + 7 = 2 + (5 + 3 + 7) = 2 + 5 + (3 + 7)$

Suma oricărui număr natural cu 0 este egală cu acel număr: $a + 0 = a$. Spunem că 0 este element neutru pentru adunare

Exemplu. $3 + 0 = 3$; $5 + 0 = 5$.

Scăderea este operaţia inversă adunării.
A scădea un număr b (scăzător) dintr-un număr a (descăzut) înseamnă a găsi un număr c (rest sau diferenţă) care adunat cu b să dea numărul a

$$a - b = c \quad \text{dacă} \quad b + c = a.$$

Exemple

$5 - 3 = 2$ căci $2 + 3 = 5$
$5 - 5 = 0$ căci $0 + 5 = 5$
$7 - 0 = 7$ căci $7 + 0 = 7$.

Dacă a şi b sînt numere naturale atunci $a - b$ este număr natural dacă şi numai dacă $a > b$(a mai mare decît b).

Dacă $a = b$, $a - b = 0$.

Dacă $a < b$ (a mai mic decît b) $a - b$ nu este număr natural.

Ordinea efectuării operaţiilor de adunare şi scădere şi folosirea parantezelor

Adunarea şi scăderea sînt operaţii de acelaşi ordin (ordinul I). Dacă avem o expresie, care nu cuprinde paranteze, în care avem de efectuat adunări şi scăderi, le putem efectua în ordinea în care sînt scrise.

De exemplu: $7 + 5 - 3 - 2 = 12 - 3 - 2 = 9 - 2 = 7$.

Dacă o expresie cuprinde şi paranteze atunci efectuăm mai întîi calculele din paranteze. Se folosesc paranteze mici ( ); paranteze drepte [ ]; acolade { }. Se efectuează întîi calculele din parantezele mici, apoi din cele drepte apoi cele din acoladă.

Exemple. 1) $7 + 5 - (3 - 2) = 7 + 5 - 1 = 11$
2) $7 - \{4 - [5 - (4 - 2)]\} = 7 - [4 - (5 - 2)]$.

Am efectuat calculul din paranteza mică $4 - 2 = 2$. Acoladele s-au transformat în paranteze drepte; parantezele drepte în paranteze rotunde. Mai departe se efectuează calculul din paranteza mică $5 - 2 = 3$ şi obţinem:

$$7 - [4-(5 - 2)] = 7 - (4 - 3)$$
$$7 -(4 - 3) = 7 - 1 = 6.$$

Proprietăţi ale operaţiilor de adunare şi scădere cu numere naturale

1. *Pentru a aduna un număr la o sumă este suficient să adunăm acest număr la un termen al sumei.*

În adevăr, pe baza comutativităţii adunării, fiind dată suma $a + b = s$, avem $s + c = (a + b) + c = (a + c) + b$.

Exemplu. $(125 + 32) + 75 = (125 + 75) + 32 = 200 + 32 = 232$.

2. *Pentru a scădea un număr dintr-o sumă este suficient să scădem acest număr dintr-un termen al sumei (dacă acest lucru este posibil).*

Fiind dată $s = a + b$ avem

$$s - m = a - m + b.$$

În adevăr, $s - m = b + a - m$ (comutativitate).

Dacă mărim un termen al sumei cu un număr, suma se măreşte cu acel număr: $s - m + m = b + (a - m + m)$. Din definiţia scăderii

$$s - m + m = s$$
$$a - m + m = a,$$
$$s = b + a.$$

Exemplu. $(17 + 5) - 7 =(17 - 7) + 5 = 10 + 5 = 15$.

3. *Dacă adunăm un număr la un termen al sumei şi scădem acelaşi număr dintr-un alt termen al sumei, suma nu se schimbă.*

$$a + b + c = s, \qquad (a + d) + b + (c - d) = s.$$

În adevăr,
$$a + d + b + c = s + d,$$
$$(a + d) + b + (c - d) = s + d - d,$$
$$(a + d) + b + (c - d) = s.$$

Exemplu. $(15 + 3 + 4) = (15 + 2) + 3 + (4 - 2) = 22$.

4. *Dacă adunăm un număr la descăzut, diferenţa se măreşte cu acel număr: dacă adunăm un număr la scăzător diferenţa se micşorează cu acel număr. Dacă adunăm un număr atît la descăzut cît şi la scăzător, diferenţa nu se schimbă.*

$a - b = d,$

1° $(a + m) - b = d + m,$

2° $a - (b + m) = d - m,$

3° $(a + m) - (b + m) = d.$

În adevăr, aplicînd definiţia scăderii:

1' $b + d + m = d + b + m = (a - b + b) + m = a + m,$

2' $d - m + b + m = (d - m + m) + b = d + b = a - b + b = a$

$3'\ d + (b + m) = a - b + b + m = a + m.$

Exemplu. $15 - 6 = (15 + 4) - (6 + 4) = 19 - 10 = 9.$

5. *Dacă scădem un număr din descăzut, diferența se micșorează cu acel număr; dacă scădem un număr din scăzător, diferența se mărește cu acel număr; dacă scădem din ambii termeni ai unei diferențe același număr, diferența nu se schimbă.*

$$a - b = d\ (a - b > 0),\quad 1°\ (a - m) - b = d - m,$$
$$2°\ a - (b - m) = d + m,$$
$$3°\ (a - m) - (b - m) = d.$$

În adevăr, $1')\ b + d - m = b + (a - b) - m = (a + b - b) - m = a - m,$

$2')\ d + m + b - m = a - b + m + b - m = (a - b + b) +$
$+ m - m = a,$

$3')\ d + (b - m) = (a - b) + (b - m) = a - b + b - m =$
$= a - m.$

Exemplu. $15 - 6 = (15 - 5) - (6 - 5) = 10 - 1 = 9.$

6. *Pentru a scădea o sumă dintr-un număr scădem pe rînd termenii sumei.*

$a - (b + c) = d \qquad (a > b + c), \qquad a - (b + c) = a - b - c.$

În adevăr, $b + c + (a - b - c) = b + c + a - b - c = a + (c + b - b) -$
$- c = a + c - c = a.$

Exemplu. $17 - (5 + 8) = (17 - 5) - 8 = 12 - 8 = 4.$

7. *Pentru a aduna o diferență la un număr este suficient să scădem scăzătorul din acel număr dacă scăderea este posibilă, apoi la rezultat să adunăm descăzutul sau adunăm descăzutul la acel număr și apoi din rezultat scădem scăzătorul.*

$$a + (b - c) = s,$$
$$1°\ a + (b - c) = a - c + b,$$
$$2°\ a + (b - c) = a + b - c.$$

În adevăr, pe baza proprietății a treia și a cincea:

$1'\ a + (b - c) = (a - c) + (b - c + c) = a - c + b = s,$

$2'\ a + (b - c) = a + b + (b - b - c) = a + b - c = s.$

Exemplu. $17 + (25 - 12) = (17 - 12) + 25 = 5 + 25 = 30,$
$17 + (25 - 12) = 17 + 25 - 12 = 42 - 12 = 30.$

8. *Pentru a scădea o diferență dintr-un număr este suficient să scădem din acel număr descăzutul (dacă este posibil) și la rezultat să adunăm scăzătorul sau să adunăm scăzătorul la acel număr și din rezultat să scădem pe descăzut.*

$$a - (b - c) = d,$$
$$1°\ a - (b - c) = (a - b) + c, \quad a - b > 0,$$
$$2°\ a - (b - c) = a + c - b$$

Relațiile sînt adevărate căci aplicînd relația de definiție a diferenței, comutativitatea și asociativitatea sumei avem:

$1')\ (b - c) + (a - b) + c = (a - b) + (b - c) + c = (a - b + b) - c + c = a$

deci $\qquad a - (b - c) = (a - b) + c,$

$$2') \ (a + c - b) + (b - c) = a + c - b + b - c = a + (c - b + b) - c = a + c - c = a$$

deci $$a - (b - c) = a + c - b$$

Exemple. a) $17 - (13 - 3) = 17 - 13 + 3 = 4 + 3 = 7$,

$17 - (13 - 3) = 17 + 3 - 13 = 20 - 13 = 7$,

b) $17 - (25 - 9) = 17 + 9 - 25 = 1$.

Înmulțirea

A înmulți un număr a numit deînmulțit cu un număr natural b numit înmulțitor înseamnă a găsi un număr notat $a \cdot b$ numit produs. Prin produsul $a \cdot b$ (b număr natural) înțelegem o sumă de b termeni în care fiecare termen este egal cu a:

$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ termeni}} = a \cdot b.$$

Numerele a și b se numesc factori ai produsului

$$0 \cdot a = 0 \quad \text{căci} \quad 0 \cdot a = \underbrace{0 + 0 + 0 \ldots + 0}_{a \text{ termeni}} = 0.$$

Prin definiție:
$a \cdot 0 = 0$ (produsul unui număr cu zero este zero),
$a \cdot 1 = a$ (produsul unui număr cu 1 este acel număr).
Produsul a două numere naturale este totdeauna un număr natural.
Produsul $a \cdot b \cdot c = \underbrace{ab + ab + \ldots + ab}_{c \text{ termeni}}$.

Pentru a efectua un produs de mai mulți factori înmulțim produsul primilor doi factori cu al treilea; produsul obținut cu al patrulea factor ș.a.m.d.

Observare. Un produs de doi factori este egal cu zero, dacă și numai dacă unul din factori este egal cu zero.

În adevăr,
dacă $a = 0$ atunci $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$ oricare ar fi b,
dacă $b = 0$ atunci $a \cdot b = a \cdot 0 = 0$ oricare ar fi a,
dacă $a \neq 0$ și $b = 1$, $a \cdot b = a \cdot 1 = a \neq 0$,
dacă $a \neq 0$ și $b > 1$ atunci $a \cdot b = a + a + \ldots + a + a \neq 0$ b (termeni diferiți de zero).

Proprietățile înmulțirii

1) $a \cdot b = b \cdot a$. Înmulțirea este comutativă $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$.

2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ înmulțirea este asociativă.

Exemplu. $7 \cdot 5 \cdot 4 = 7 \cdot (5 \cdot 4)$.

3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Înmulțirea este distributivă față de adunare și scădere.

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$; $a \cdot b - a \cdot c = a (b - c)$.

Exemple.

$$3 \cdot (5 + 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2,$$
$$2 \cdot (7 - 4) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 4$$

Împărţirea numerelor naturale. În mulţimea numerelor din şirul lărgit al numerelor naturale, fiind date două numere a şi $b \neq 0$, a împărţi numărul a, numit deîmpărţit, la numărul b, numit împărţitor, înseamnă a găsi un număr q, numit cît, şi un număr $r (0 \leqslant r < b)$, numit rest, astfel încît să existe relaţia

$$a = bq + r.$$

Observări. 1) Condiţia $b \neq 0$ se explică prin faptul că împărţirea unui număr la zero nu are sens.

2) Pentru două numere date a şi $b \neq 0$ există un singur număr q şi un singur număr $r < b$ astfel încît relaţia 1) să fie satisfăcută.

Împărţirea exactă. Dacă la împărţirea numerelor a şi $b \neq 0$ obţinem cîtul q şi restul $r = 0$, atunci împărţirea se numeşte exactă şi relaţia 1) devine

1') $a = bq$

Exemple. 26 : 4 = 6 (rest 2) căci $4 \cdot 6 + 2 = 26$;
16 : 5 = 3 (rest 1) căci $5 \cdot 3 + 1 = 16$;
20 : 4 = 5 (rest 0) căci $4 \cdot 5 = 20$.

Observare. Prin împărţire, în mulţimea numerelor naturale, se rezolvă două probleme:

a) *Împărţirea în părţi egale* sau micşorarea unui număr de un număr de ori.

b) *Împărţirea prin cuprindere.* În acest caz se află de cîte ori se cuprinde un număr (împărţitor) într-un alt număr (deîmpărţit).

Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor

Înmulţirea şi împărţirea (exactă) sînt operaţii de ordinul II.

Dacă într-o expresie fără paranteze sînt operaţii de înmulţire şi împărţire ele se pot efectua în ordinea în care sînt scrise. Dacă expresia conţine paranteze, se efectuează mai întîi operaţiile din paranteze, întîi din cele rotunde, apoi din cele pătrate apoi din acolade.

Exemple. 1) $250 : 25 : 5 = 10 : 5 = 2$;
2) $50 : 2 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$;
3) $250 : (25 : 5) = 250 : 5 = 50$;
4) $50 : (2 \cdot 5) = 50 : 10 = 5$.

Cercetînd exemplele 1 şi 3 şi 2 şi 4 observăm că folosirea parantezelor a condus la schimbarea rezultatelor.

5) $5 \cdot \{150 : [20 : (2 \cdot 2)]\} = 5 \cdot [150 : (20 : 4)]$

Am efectuat operaţia din paranteza mică $2 \cdot 2 = 4$

$$5 \cdot [150 : (20 : 4)] = 5 \cdot (150 : 5)$$

Am efectuat operaţia din paranteza dreaptă (pe care am schimbat-o în paranteza mică):

$$20 : 4 = 5$$
$$5 \cdot (150 : 5) = 5 \cdot 30 = 150.$$

Dacă avem o expresie fără paranteze cu toate cele 4 operaţii vom efectua mai întîi înmulţirile şi împărţirile (operaţiile de ordinul II) apoi adunările şi scăderile (operaţiile de ordinul I). Dacă expresia cuprinde paranteze se efectuează mai întîi calculele din paranteze (din cele mici apoi din cele drepte apoi din acolade). Calculele din paranteză se fac ţinînd seama de ordinea operaţiilor.

Exemple. 1) $117 - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 117 - 10 + 12 = 107 + 12 = 119$;
2) $117 - 5\,(2 + 3 \cdot 4) = 117 - 5\,(2 + 12) = 117 - 5 \cdot 14 = 117 - 70 = 47$.

Proprietăţile operaţiilor de înmulţire şi împărţire

Pe baza proprietăţilor înmulţirii (comutativitatea şi asociativitatea) rezultă următoarele proprietăţi:

1. *Pentru a înmulţi un număr cu un produs este suficient să înmulţim numărul cu un factor al produsului şi rezultatul să-l înmulţim cu ceilalţi factori ai produsului.*

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = b \cdot (a \cdot c).$$

Exemplu. $25 \cdot (13 \cdot 4) = 13 \cdot 4 \cdot 25 = 13 \cdot 100 = 1300.$

În practică, înmulţim numărul cu factorul care conduce la un calcul mai simplu.

2. *Pentru a înmulţi un produs cu un număr este suficient să înmulţim un factor al produsului cu acel număr şi rezultatul să-l înmulţim cu ceilalţi factori.*

$$(a \cdot b \cdot c) \cdot d = abcd = (ad)\,bc = (bd)\,ac = (cd)\,ab.$$

Exemplu. $(25 \cdot 7 \cdot 3) \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 7 \cdot 3 = 100 \cdot 21 = 2100.$

3. *Dacă împărţim un număr a la un alt număr b şi apoi înmulţim rezultatul cu acelaşi număr b obţinem numărul a*

$$(a : b) \cdot b = a$$

Exemplu. $(6 : 3) \cdot 3 = 6.$

4. *Dacă înmulţim deîmpărţitul cu un număr natural, cîtul se măreşte de acel număr de ori.*

Dacă $a : b = c$, atunci $(a \cdot m) : b = c \cdot m$.

Din definiţia împărţirii trebuie să avem $(cm) \cdot b = a \cdot m$.

În adevăr: $(cm) \cdot b = c \cdot m \cdot b = m \cdot c \cdot b = m\,(a : b) \cdot b = ma$

Am aplicat comutativitatea, asociativitatea şi proprietatea precedentă.

Exemplu. $18 : 3 = 6$; $18 \cdot 2 : 3 = 12 = 6 \cdot 2$.

5. *Dacă înmulţim împărţitorul cu un număr natural, cîtul se împarte cu acel număr.*

Dacă $a : b = c$, atunci $a : (b \cdot m) = c : m$.

În adevăr $(b \cdot m) \cdot (c : m) = b \cdot m \cdot (c : m) = b \cdot (c : m) \cdot m = bc = a$.

Exemplu. $18 : 3 = 6, \quad 18 : (3 \cdot 2) = 3 = 6 : 2.$

6. *Consecinţă. Dacă se înmulţesc şi deîmpărţitul şi împărţitorul unei împărţiri cu acelaşi număr cîtul nu se schimbă.*

Dacă $a : b = c$, atunci $(a \cdot m) : (b \cdot m) = c.$

În adevăr, avem succesiv

$$(a \cdot m) : b = c \cdot m,$$
$$(a \cdot m) : (b \cdot m) = c \cdot m : m = c,$$

Exemplu. $18 : 3 = 6, \quad (18 \cdot 2) : (3 \cdot 2) = 6.$

7. *Dacă împărţim deîmpărţitul cu un număr natural cîtul se împarte cu acel număr.*

Dacă $a : b = c$, atunci $(a : m) : b = c : m.$

Din definiţia împărţirii:

$$b \cdot (c : m) = b \cdot c : m = a : m, \quad \text{căci } bc = a$$

Exemplu. $18 : 3 = 6, \quad (18 : 2) : 3 = 3 = 6 : 2.$

8. *Dacă împărţim împărţitorul cu un număr natural cîtul se înmulţeşte cu acel număr.*

Dacă $a : b = c$, atunci $a : (b : m) = c \cdot m.$

Din definiţia împărţirii,

$$(b : m) \cdot cm = (b : m) \cdot mc,$$
$$(b : m) \cdot mc = b \cdot c = a.$$

Exemplu. $18 : 6 = 3, \quad 18 : (6 : 2) = 6 = 3 \cdot 2.$

9. *Consecinţă. Dacă împărţim ambii termeni cu acelaşi număr cîtul nu se schimbă.*

Exemplu. $18 : 6 = 3, \quad (18 : 2) : (6 : 2) = 3.$

10. *Pentru a împărţi un produs cu un număr este suficient să împărţim unul din factori cu acel număr şi rezultatul să-l înmulţim cu ceilalţi factori.*

$$(a \cdot b \cdot c) : d = (a : d) \cdot bc.$$

Aplicînd definiţia împărţirii:

$$(a : d) \cdot bc \cdot d = (a : d) \cdot d \cdot bc,$$
$$(a : d) \cdot d \cdot bc = abc.$$

Deci $(abc) : d = (a : d) \cdot b \cdot c.$

Exemplu. $(25 \cdot 2 \cdot 3) : 5 = (25 : 5) \cdot 2 \cdot 3 = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30.$

11. *Pentru a împărţi un număr cu un produs este suficient să împărţim numărul succesiv cu factorii produsului.*

$$a : (b \cdot c) = a : b : c.$$

În adevăr, aplicînd (9),

$$a : (b \cdot c) = a : b : (bc : b) = a : b : (cb : b) = a : b : c.$$

Exemplu. $18 : (2 \cdot 3) = 18 : 2 : 3 = 9 : 3 = 3.$

12. *Pentru a împărţi un număr la un cît este suficient să înmulţim numărul cu împărţitorul şi rezultatul să-l împărţim la deîmpărţit sau să împărţim numărul la deîmpărţit şi rezultatul să-l înmulţim cu împărţitorul.*

$$a : (b : c) = a \cdot c : b = a : b \cdot c.$$

În adevăr, aplicînd (6) apoi (9),

$$a : (b : c) = a \cdot c : (b : c \cdot c) = a \cdot c : b \text{ și}$$
$$a : (b : c) = (a \cdot c) : (b : c \cdot c) = (a \cdot c) : b$$

aplicînd (10), $a : (b : c) = a : b \cdot c$.

Exemplu. $36 : (18 : 2) = 36 \cdot 2 : 18 = 4$,
$36 : (18 : 2) = 36 : 18 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$.

Observare. În proprietățile stabilite se presupune că toate împărțirile sînt exacte.

13. *Dacă înmulțim (împărțim) ambii termeni cu un număr natural, cîtul nu se schimbă dar restul (dacă există) se mărește (micșorează) de acel număr de ori.*

$$a : b = c \quad (\text{rest } r) \quad \text{sau} \quad a = bc + r, \quad r < b.$$

1) $(am) : (bm) = c$ rest rm; 2) $(a : m) : (b : m) = c$ rest $r : m$

În adevăr, din $a = bc + r$ avem $a - bc = bc - bc + r$,

$$a - bc = r \qquad \text{deci}$$

1′) $ma - bc \cdot m = rm$ (am înmulțit ambii termeni ai unei diferențe cu m și diferența s-a mărit de m ori).

Dar dacă $r < b$ și $mr < mb$,
deci $ma : (b \cdot m) = c$ (rest rm).
2′) $a - bc = r$,
$a : m - (bc : m) = r : m$ (am împărțit ambii termeni ai unei diferențe cu m), deci:

$$a : m = (b : m) \cdot c + r : m.$$

14. *Împărțirea este distributivă față de adunare și scădere.*

$$(a + b + c) : m = a : m + b : m + c : m,$$
$$(a - b) : m = a : m - b : m.$$

Puteri

Puterea n a unui număr a ($n \in N$) este un produs de n factori egali cu a și se notează a^n.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}} = a^n.$$

a se numește baza puterii, n exponentul puterii. De exemplu

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4.$$

3^4 (puterea a 4-a a lui 3); 3 (baza puterii); 4 (exponentul puterii).
Cazuri particulare:

$a = 0$; $0^n = 0$ $(n \neq 0)$
$a = 1$; $1^n = 1$

$n = 0$; $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$ Orice număr diferit de zero ridicat la o putere cu exponent 0 este egal cu 1.

$n = 1$; $a^1 = a$ Orice număr ridicat la o putere cu exponentul 1 este egal cu el însuși.

$n = 2$; a^2 se numește pătratul numărului a.

$n = 3$; a^3 se numește cubul numărului a.

Pătratul numărului 5 este $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$.

Cubul numărului 4 este $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Operații cu puteri

1. *Produsul a două puteri, care au aceeași bază, este tot o putere care are aceeași bază iar ca exponent suma exponenților.*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad m, n \in N.$$

În adevăr,

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ factori}} = a \cdot a \ldots a = a^{m+n}.$$

Exemplu. $3^5 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7$.

În mod analog

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}.$$

2. *Cîtul a două puteri care au aceeași bază este tot o putere cu aceeași bază iar ca exponent diferența exponenților.*

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad m, n \in N \text{ și } m > n.$$

În adevăr, a împărți numărul a^m la numărul a^n înseamnă a găsi un număr care înmulțit cu a^n să ne dea a^m. Dar $a^n \cdot a^{m-n} = a^m$.

Dacă $m = n$, $a^m : a^m = 1$. Putem spune $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 = 1$.

Deci $a^m : a^n = a^{m-n}$ pentru $m \geqslant n$.

3. *Ridicarea unei puteri la altă putere. Dacă ridicăm o putere la altă putere, obținem tot o putere care are aceeași bază și exponentul egal cu produsul exponenților.*

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad m, n \in N.$$

În adevăr,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \ldots a^m}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^{m+m+\ldots+m} = a^{mn}$$

Exemple. $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$,

$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2 \cdot 3} = a^6$.

4. *Puterea unui produs se calculează ridicînd fiecare factor al produsului la acea putere.*

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m.$$

În adevăr, $(a \cdot b)^m = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)$ de m ori.

Aplicînd regulile înmulțirii cu un produs și proprietățile de comutativitate și asociativitate obținem succesiv

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ factori}} = a^m \cdot b^m.$$

Exemple. $(3 \cdot 5)^3 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$
$= (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5),$
$(3 \cdot 5)^3 = 3^3 \cdot 5^3,$
$(2 \cdot 7)^2 = 2^2 \cdot 7^2.$

Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr natural

În mulțimea numerelor din șirul lărgit al numerelor naturale a extrage rădăcina pătrată dintr-un număr A înseamnă a găsi un număr a numit rădăcina pătrată și un număr r numit rest astfel încît

$A = a^2 + r$ cu condiția $a^2 \leqslant A < (a+1)^2.$

Se notează

$$\sqrt{A} = a \text{ (rest } r).$$

Exemple.

1) $\sqrt{82} = 9$(rest 1) căci $9^2 < 82 < 10^2$
și $82 = 9^2 + 1$

2) $\sqrt{63} = 7$ (rest 14) căci $7^2 < 63 < 8^2$
și $63 = 7^2 + 14$

Dacă $r = 0$ extragerea rădăcinii pătrate se face exact. Numerele din care rădăcina pătrată se extrage exact se numesc *pătrate perfecte*.

Exemple. $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{169} = 13$.

Numere întregi

Fiind date a și b, numere naturale, dacă $a < b$ scăderea $a - b$ nu se poate efectua în mulțimea numerelor naturale $[(a - b) \notin N]$; în acest caz numărul $a - b$ se numește *număr întreg negativ*.

De exemplu $7 - 9$ este un număr întreg negativ. Pentru a efectua scăderea, scădem mai întîi 7 unități din 7 (obținem 0) și mai avem de scăzut 2 unități. Acest lucru îl notăm -2 și citim minus doi.

Numerele naturale le vom considera precedate de semnul + (plus) și le vom numi numere întregi pozitive.

Numerele negative apar în practică ca măsuri ale unor mărimi orientate.

Exemple. Temperatura: $+5$ (5 grade deasupra lui 0),
-15 (15 grade sub 0).

Altitudinea: + 150 (150 m deasupra nivelului mării),
— 25 (25 m sub nivelul mării).

Sume de bani: + 500 (un cîștig de 500 lei),
— 350 (o datorie de 350 lei).

Valoarea absolută sau modulul unui număr a se notează $|a|$.

Valoarea absolută a unui număr pozitiv este chiar acel număr $|a| = a$, $(a > 0)$.

Valoarea absolută a unui număr negativ este acel număr luat cu semnul schimbat $|a| = -a$ $(a < 0)$.

Valoarea absolută a numărului 0 este 0 ($|0| = 0$).

Deci $|a| \geqslant 0$.

Exemple. $|-5| = 5$; $|+6| = 6$; $|0| = 0$;
$|+7| = 7$; $|-15| = 15$; $|-3| = 3$.

Două numere care au aceeași valoare absolută dar semne diferite se numesc opuse.

Exemple. $+2$ și -2; $+5$ și -5; -7 și $+7$; a și $-a$.

Mulțimea formată din numerele întregi pozitive (naturale) numărul zero, numerele întregi negative este mulțimea numerelor întregi: $\ldots -n, \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Numere întregi:
- Numere întregi pozitive
- numărul zero
- numere întregi negative

Mulțimea numerelor naturale (N) este inclusă în mulțimea numerelor întregi notată cu Z

$$N \subset Z.$$

Orice număr pozitiv este mai mare decît 0; $(+5 > 0)$, orice număr negativ este mai mic decît 0 și mai mic decît orice număr pozitiv $(-3 < 0;\ -3 < 1)$.

Dintre două numere negative acela este mai mare care este în valoare absolută mai mic.

$$-3 < -1 \quad , \quad |-3| > |-1| .$$

Adunarea și scăderea numerelor întregi

Regulă. Pentru a aduna două numere întregi de același semn facem suma valorilor absolute ale celor două numere și la rezultat dăm semnul comun.

Pentru a aduna două numere întregi care nu au același semn facem diferența dintre valorile absolute ale celor două numere, scădem valoarea absolută mai mică din valoarea absolută mai mare și la rezultat dăm semnul numărului care are valoarea absolută mai mare.

Exemple.
1) $(+5) + (+3) = +8$, $|5| + |3| = 8$,
2) $(-5) + (-3) = -8$, $|-5| + |-3| = 8$,
3) $(+5) + (-3) = +2$, $|5| - |-3| = 5 - 3 = 2$, $|5| > |-3|$,
4) $(-5) + (+3) = -2$, $|-5| - |+3| = 2$, $|-5| > |+3|$,
5) $(+5) + (-8) = -3$, $|-8| - |5| = 3$, $|-8| > |5|$.

Interpretarea regulii: 1) Ce temperatură este acum dacă erau 5 grade deasupra lui zero (+5) și temperatura s-a mai urcat cu 3 grade?

Temperatura este de ($5 + 3 = 8$) 8 grade deasupra lui 0, deci $+ 8°$.

2) Temperatura a fost 5 grade sub zero (—5) și a mai coborît cu 3 grade (—3). Ce temperatură este acum?

Dacă de la —5 a mai coborît 3 grade acum sînt ($5 + 3 = 8$) 8 grade sub zero deci $-8°$.

3) Temperatura a fost 5 grade deasupra lui zero și a coborît cu 3 grade (—3). Ce temperatură este acum?

Dacă de la 5 grade a coborît 3 grade, avem ($5 - 3 = 2$) 2 grade deasupra lui zero, deci $+2°$.

4) Temperatura a fost 5 grade sub zero și s-a urcat cu 3 grade (+3). Ce temperatură este acum?

Dacă s-a urcat cu 3 grade temperatura a devenit ($5 - 3 = 2$) 2 grade sub zero, deci $-2°$.

5) Temperatura a fost 5 grade deasupra lui zero și a scăzut cu 8 grade (—8). Ce temperatură este acum?

Dacă temperatura a scăzut cu 5 grade ea a devenit zero grade; apoi a mai coborît 3 grade deci a devenit 3 grade sub zero, deci $-3°$.

Observări. 1) Suma a două numere opuse este 0. $(-5) + (5) = 0$.

2) Adunarea are ca element neutru numărul zero:

$a + 0 = a$ (a aparține mulțimii numerelor întregi).

3) Pentru simplificarea scrisului cînd avem de adunat mai multe numere întregi considerăm semnul de adunare (+) ca subînțeles între toți termenii, omitem parantezele și trecem toți termenii sumei succesiv cu semnele respective. Dacă primul termen al sumei este pozitiv putem omite semnul acestui termen.

De exemplu: $S = (+ 7) + (- 5) + (- 3) + (+ 2)$
se poate scrie

$$S = 7 - 5 - 3 + 2.$$

Scăderea numerelor întregi

Scăderea numerelor întregi se definește la fel ca scăderea numerelor naturale.

Pentru a scădea un număr întreg b dintr-un număr întreg a adunăm la numărul a opusul scăzătorului $(-b)$

$$a - b = a + (- b).$$

În adevăr, în definiția scăderii se precizează că diferența trebuie să fie un număr care adunat cu scăzătorul (b) să dea pe descăzut (a) dar

$$a + (- b) + b = a - b + b = a$$

deci

$$a - b = a + (- b).$$

Exemple.

$$(+ 7) - (+ 3) = 7 + (- 3) = 7 - 3 = 4,$$
$$(- 7) - (+ 3) = - 7 + (- 3) = - 7 - 3 = - 10,$$
$$(- 7) - (- 3) = - 7 + (+ 3) = - 7 + 3 = - 4.$$

Observări. 1) Prin 7—3 se poate deci înțelege sau diferența $(+7)-(+3)$ sau suma $(+7)+(-3)$; în ambele cazuri rezultatul este același $(+4)$.

2) Pentru a compara două numere naturale putem face diferența lor și aflăm cu cît este mai mare un număr decît alt număr.

În mulțimea numerelor întregi putem compara două numere a și b tot prin diferența $a-b$ și anume:

1° Dacă $a-b>0$ atunci $a>b$ (a mai mare decît b).
2° Dacă $a-b=0$ atunci $a=b$ (a egal cu b).
3° Dacă $a-b<0$ atunci $a<b$ (a mai mic decît b).

Exemple. Să se compare numerele:

(-5) și (-3); (-5) și (-13); (-5) și $(+3)$;

$(-5)-(-3)=-5+(+3)=-5+3=-2<0$, deci $(-5)<(-3)$,

$(-5)-(-13)=-5+(+13)=-5+13=8>0$, deci $(-5)>(-13)$,

$-5-(+3)=-5+(-3)=-5-3=-8<0$, deci $(-5)<(+3)$.

Suma algebrică

Definiție. *Suma algebrică este o sumă în care termenii (numere negative sau pozitive) sînt trecuți succesiv cu semnele corespunzătoare iar semnul de operație (+) dintre termeni este subînțeles.*

De exemplu: $(-5)+(-3)+(+7)-(-5)=-5-3+7+5$

$S=-5-3+7+5$ este o sumă algebrică.

Ea se efectuează ca și suma de numere naturale adunînd la primul termen al doilea termen, la rezultat al treilea ș.a.m.d.

Proprietățile sumei algebrice: Comutativitatea.

Într-o sumă algebrică putem schimba ordinea termenilor păstrînd semnul pe care-l au.

1) $+5+3=+3+5$

2) $-5-3=-3-5$

$-5-3=-[|-5|+|-3|]$

Aplicînd comutativitatea adunării numerelor naturale

$$-(|-5|+|-3|)=-(|-3|+|-5|)=-3-5.$$

În general $a+b+c=b+a+c=a+c+b$
unde a, b și c sînt numere întregi.

Asociativitatea. Într-o sumă algebrică putem înlocui suma a doi sau mai mulți termeni cu rezultatul acestei sume.

$$(5+3)+2=5+(3+2).$$

În general: $(a+b)+c=a+(b+c)$ în care a, b, c sînt numere întregi.

Consecințe. Pentru a calcula o sumă algebrică putem aplica comutativitatea și asociativitatea, de exemplu; asociem toți termenii pozitivi și efectuăm suma; asociem toți termenii negativi și efectuăm suma și apoi facem suma algebrică a acestor două sume. Cînd în sumă există doi termeni opuși îi putem asocia și suma lor este 0.

Exemple. 1) $17-15+25-30=(17+25)+(-15-30)=42-45=-3$.
2) $17-15-17+10=(17-17)+(-15+10)=-5$.

Pe baza comutativității și asociativității adunării numerelor naturale, am dedus comutativitatea și asociativitatea sumei algebrice deci suma algebrică se va bucura de toate proprietățile sumei de numere naturale deduse pe baza celor două proprietăți de bază:

1. *Pentru a aduna o sumă algebrică la un număr adunăm pe rînd termenii sumei cu semnele respective.*

$$a + (b + c + d) = a + b + c + d.$$

Exemplu. $-17 + (-3 + 5 - 7) = -17 - 3 + 5 - 7 = -27 + 5 = -22.$

2. *Pentru a scădea o sumă algebrică dintr-un număr se adună la acest număr toți termenii sumei cu semnul schimbat* $a - (b - c) = a - b + c.$

În adevăr, adunînd același număr în ambii termeni ai diferenței, diferența nu se schimbă.

$a - (b - c) = a + c - (b - c + c) = a + c - b$ (aplicînd asociativitatea și $-c + c = 0$).

Dar $a + c - b = a - b + c$ (comutativitatea).

Deci: $a - (b - c) = a - b + c.$

Consecință. Cînd avem de efectuat mai multe adunări și scăderi de sume algebrice suprimăm parantezele care au semnul plus înainte și trecem toți termenii din aceste sume cu semnele lor, suprimăm parantezele care au semnul minus înainte și trecem toți termenii din aceste sume cu semnele schimbate.

$$a + (b + c) - (-d + e) = a + b + c + d - e.$$

Exemple. $5 + (-3 + 2) - (5 - 7) = 5 - 3 + 2 - 5 + 7 = (5 - 5) + 7 + 2 - 3 = 6.$

$-(5 + 3 - 7) + (3 - 5) - (-2 + 7) = -5 - 3 + 7 + 3 - 5 + 2 - 7 = (-5 + 3 + 2) + (7 - 7) - 3 - 5 = -8.$

Observare. În calculele numerice putem proceda pe baza convențiilor făcute la numerele naturale asupra ordinei operațiilor, efectuînd calculele din paranteză.

Exemple. $5 - (7 - 2 + 3) = 5 - (8) = 5 - 8 = -3$

$(-7 + 5 - 3) - (-5 + 3 - 8) - (3 - 5 + 8) = -5 - (-10) - 6 = -5 + 10 - 6 = -1.$

Introducerea termenilor în paranteze

Regulă. Fiind dată o sumă algebrică putem închide doi sau mai mulți termeni într-o paranteză precedată de semnul + sau —. Dacă paranteza este precedată de semnul + scriem toți termenii cuprinși în paranteză cu semnele lor; dacă este precedată de semnul — termenii se trec cu semnele schimbate.

$$a + b + c + d = a + (b + c + d) = a - (-b - c - d).$$

Exemple. 1) $+5 - 3 + 7 - 5 + 6 = 5 + (-3 + 7) - (+5 - 6).$

Termenii -3, $+7$ au fost trecuți cu semnele lor; termenii -5, $+6$ au fost trecuți cu semne schimbate căci paranteza a fost precedată de semnul —.

2) $-17 - 32 + 2 - 5 - 7 = -17 + (-32 + 2) - (5 + 7).$

Înmulțirea numerelor întregi

Produsul a două numere întregi este un număr întreg care are ca modul (valoare absolută) produsul modulelor și ca semn, semnul + dacă factorii au același semn, semnul — dacă factorii au semne contrare. Semnul de înmulțire este × sau · (un punct scris între numere).

Dacă numerele sînt puse în paranteză semnul de înmulțire se poate omite el se subînțelege. Exemplu: $(-5) \times (-3) = (-5) \cdot (-3) = (-5)\ (-3)\ a \cdot b = ab.$

Exemple.

Semnul produsului.

$(+3) \cdot (+5) = +3 \cdot 5 = +15,$
$(-3) \cdot (-5) = +3 \cdot 5 = +15,$
$(-3) \cdot (+5) = -3 \cdot 5 = -15,$
$(+3) \cdot (-5) = -3 \cdot 5 = -15.$

Deînmulțitul	Înmulțitorul	Produsul
+	+	+
—	—	+
—	+	—
+	—	—

Consecințe. 1) Numărul + 1 este element neutru pentru înmulțire în mulțimea numerelor întregi.

$$a \cdot 1 = a.$$

2) Un număr întreg a înmulțit cu — 1 ne dă numărul opus $a \cdot (-1) = -a.$
3) Un număr întreg înmulțit cu 0 ne dă 0.

$$a \cdot 0 = 0.$$

4) Produsul de mai mulți factori este 0 dacă și numai dacă cel puțin unul din factori este zero.

Înmulțirea numerelor întregi se reduce de fapt la înmulțirea numerelor naturale deci se bucură de toate proprietățile înmulțirii numerelor naturale.

Consecințe. Un produs de mai mulți factori se poate efectua înmulțind primul factor cu al doilea rezultatul cu al treilea ș.a.m.d., dar se poate calcula (aplicînd comutativitatea și asociativitatea) asociind factori care au același semn.

Produsul factorilor pozitivi va fi pozitiv; produsul factorilor negativi va fi pozitiv dacă avem un număr par de factori și negativ dacă avem un număr impar de factori. Produsul de mai mulți factori are semnul + dacă factorii negativi sînt în număr par și negativ dacă sînt în număr impar.

Exemple.

1) $(-3) \cdot (+5) \cdot (-2) \cdot (+7)\ (-1) = -3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1$ (am avut trei factori negativi).

2) $(-5) \cdot (-7)\ (+3)\ (-2)\ (-10) = +5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10$ (am avut 4 factori negativi).

Regulă. Pentru a înmulți două sume algebrice înmulțim fiecare termen al unei sume cu toți termenii celeilalte și facem suma produselor obținute.

$$(a + b) \cdot (c - d) = ac + bc - ad - bd.$$

În adevăr, dacă notăm $a + b = N$ avem:
$(a + b) \cdot (c - d) = N\ (c - d)$. Aplicăm distributivitatea înmulțirii față de adunare.

$$N(c-d) = Nc - Nd \quad \text{sau}$$
$$(a+b)\cdot(c-d) = (a+b)c - (a+b)\,d = ac + bc - (ad+bd),$$
$$(a+b)\cdot(c-d) = ac + bc - ad - bd.$$

Exemple.

1) $(-5+7-3)\cdot(-3+2) = (-5)\cdot(-3) + (7)\cdot(-3) + (-3)\cdot(-3) + (-5)\cdot(2) + (7)\cdot(2) + (-3)\,(2) = 15 - 21 + 9 - 10 + 14 - 6 = 1.$

În practică calculele se fac direct

2) $(-5+3-6)\cdot(+5-3) = -25 + 15 - 30 + 15 - 9 + 18 = (-25 - 30 - 9) + (15 + 15 + 18) = -64 + 48 = -16.$

Observare. Calculele se fac mai repede dacă aplicăm convențiile asupra ordinei operațiilor efectuînd calculele din paranteze

1° $(-5+7-3)\cdot(-3+2) = (-1)\cdot(-1) = 1$,

2° $(-5+3-6)\cdot(+5-3) = (-8)\cdot(+2) = -16$.

Regulă. Pentru a înmulți un produs cu un număr sau mai multe produse formăm un singur produs cu toți factorii (suprimăm parantezele care închid produsul).

$$(a\cdot b\cdot c)\cdot d = a\cdot b\cdot c\cdot d,$$
$$d\cdot(a\cdot b) = d\cdot a\cdot b,$$
$$(a\cdot b)\ (c\cdot d)\ \cdot(e\cdot f) = a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot f.$$

Împărțirea numerelor întregi

În mulțimea numerelor întregi, fiind date două numere a și $b \neq 0$, a împărți numărul a la numărul b înseamnă a găsi un număr întreg q (cîtul) și un număr întreg r (restul) $(0 \leqslant r < |b|)$ astfel încît

1) $a = bq + r$.

Numerele a și b fiind date, există un singur număr q și un singur număr r $(0 \leqslant r < |b|)$ astfel ca relația 1) să fie satisfăcută.

Exemple.

1) $(-5) : (-2) = +3$ (rest 1) căci $(-2)\cdot(+3) + 1 = -5$ și $0 < 1 < |-2|$.

2) $8 : (-5) = -1$ (rest 3) căci $(-5)\cdot(-1) + 3 = 8$ și $0 < 3 < |-5|$.

3) $(-8) : (-5) = 2$ (rest 2) căci $(-5)\cdot(2) + 2 = -8$ și $0 < 2 < |-5|$.

4) $(-7) : (2) = -4$ (rest 1) căci $2\cdot(-4) + 1 = -7$ și $0 < 1 < 2$.

Împărțirea exactă. Dacă la împărțirea numerelor întregi a și $b \neq 0$, obținem cîtul q și restul $r = 0$, împărțirea se face exact și relația 1) devine

1′) $a = bq$.

Regulă. Pentru a împărți două numere întregi împărțim valorile lor absolute și dăm cîtului semnul + dacă ambele numere au același semn și semnul — dacă numerele sînt de semne contrare.

Exemple.

$$(+15):(+3)=+5;\ (-15):(-3)=+5;\ (+15):(-3)=-5;$$
$$(-15):(+3)=-5.$$

Împărţirea cu 0 nu are sens ca şi în cazul numerelor naturale.

Puterea (cu exponent număr natural) unui număr întreg este un produs de factori egali

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}.$$

1) $a > 0 \implies a^n > 0;$

2) $a = 0 \implies a^n = 0;\ 0^n = 0. \quad (n \neq 0).$

3) $a < 0 \implies \begin{cases} a^n > 0 \text{ dacă } n \text{ este număr par} \\ a^n < 0 \text{ dacă } n \text{ este număr impar.} \end{cases}$

Puterea unui număr pozitiv este totdeauna un număr pozitiv; puterea unui număr negativ este un număr pozitiv dacă exponentul este număr par şi negativ dacă exponentul este număr impar.

Exemple. $(+5)^3 = (+5)\cdot(+5)(+5) = 5^3 = 125,$

$(-5)^2 = (-5)(-5) = +25,$

$(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)(-3)(-3)(-3) = -(3)^5 = -243.$

Operaţiile cu puteri ale numerelor întregi se efectuează după regulile cunoscute de la puterile numerelor naturale.

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $m,n \in N$; a aparţine mulţimii numerelor întregi

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ dacă $m - n > 0$

3) $a^m : a^m = a^0 = 1$ $(a \neq 0)$. Orice număr întreg diferit de zero ridicat la puterea 0 este egal cu 1.

4) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Exemple. $(-5)^3 \cdot (-5)^2 = (-5)^{3+2} = (-5)^5 = -5^5 = -3125.$

$(-2)^4 : (-2)^2 = (-2)^{4-2} = (-2)^2 = 2^2 = 4.$

$(-3)^4 : (-3)^4 = (-3)^0 = 1.$

$[(-3)^2]^3 = (-3)^6 = 729.$

Numere fracţionare

Numim *unitate fracţionară* o parte dintr-o mărime — considerată ca unitate întreagă — care a fost împărţită într-un număr de părţi egale. A n-a parte dintr-o unitate întreagă se notează $\frac{1}{n}$.

Numărul format din una sau mai multe unităţi fracţionare se numeşte fracţie şi se notează $\frac{m}{n}$; n se numeşte *numitor* — el arată în cîte părţi egale a fost împărţită unitatea întreagă — m se numeşte *numărător* — el arată cîte unităţi fracţionare are numărul $\frac{m}{n}$.

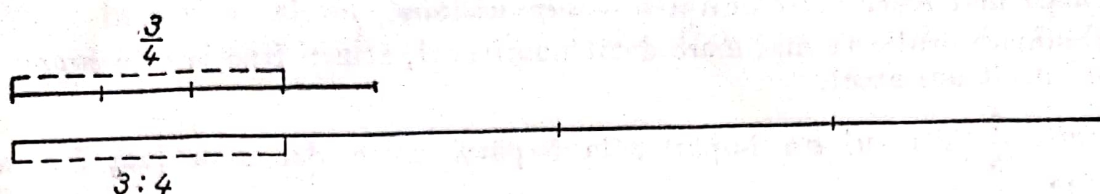


Fig. 5

Exemple. $\frac{3}{4}$ (3 unități fracționare cu numitorul 4) trei pătrimi.

Același rezultat se obține dacă se ia a patra parte din trei unități întregi deci cîtul 3 : 4 reprezintă aceeași parte din întregul considerat (fig. 5).

Cîtul a două numere naturale a, b notat $a : b$ sau $\frac{a}{b}$ se numește *număr fracționar.*

Dacă $\frac{a}{b} = c$, $c \in N$ (c număr natural) atunci cîtul $\frac{a}{b}$ este un număr natural.

Exemplu. $\frac{6}{3} = 2.$

Mulțimea numerelor naturale (N) este inclusă în mulțimea numerelor fracționare.

Fracții echivalente. Fracțiile $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ se numesc echivalente dacă $ad = bc.$

Exemplu. $\frac{3}{4}$ este echivalent cu $\frac{6}{8}$ căci

$$3 \cdot 8 = 6 \cdot 4.$$

Fracțiile $\frac{3}{4}$ și $\frac{6}{8}$ reprezintă de fapt aceeași parte din unitatea considerată (fig. 6). Se obișnuiește să se spună că aceste părți sînt egale în sensul că reprezintă aceeași parte din unitatea întreagă. În acest sens în locul semnului de echivalență se folosește semnul de egalitate pe care-l vom folosi și noi.

Compararea fracțiilor cu unitatea

1. Fracții mai mici decît unitatea — *subunitare.*

Dacă numărătorul fracției este mai mic decît numitorul atunci fracția este *subunitară* (mai mică decît unitatea). Exemple. $\frac{2}{5}$ (întregul are 5 cincimi și am luat numai 2 cincimi); $\frac{3}{7}$ (întregul are 7 șeptimi și am luat numai 3 șeptimi).

2. Fracții echivalente cu unitatea întreagă — *echiunitare.*

Dacă numărătorul este egal cu numitorul atunci fracția este *echiunitară* (egală cu unitatea).

Exemple. $\frac{5}{5}$ (întregul s-a împărțit în 5 părți egale și le-am luat pe toate 5); $\frac{7}{7}$; $\frac{11}{11}$.

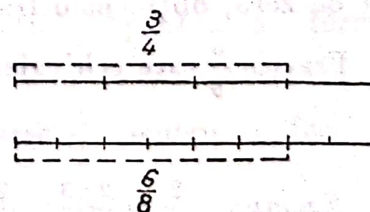


Fig. 6

3. Fracţii mai mari decît unitatea — *supraunitare.*

Dacă numărătorul este mai mare decît numitorul, atunci fracţia este *supraunitară* (mai mare decît unitatea).

Exemple. $\frac{7}{5}$ (întregul s-a împărţit în 5 părţi egale dar s-au luat 7 asemenea părţi) $\frac{11}{7}$; $\frac{13}{2}$ ş.a.m.d.

Scoaterea întregilor din fracţie. Pentru a scoate întregii dintr-o fracţie supraunitară vedem cîte grupe, de atîtea unităţi fracţionare cît arată numitorul, se pot forma din numărul unităţilor fracţionare ale numărului. Obţinem astfel numărul întregilor la care se adaugă numărul unităţilor fracţionare rămase.

De exemplu $\frac{17}{5}$ conţin 3 întregi şi au rămas 2 cincimi deci $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$. În locul sumei $3 + \frac{2}{5}$ se scrie $3\frac{2}{5}$ subînţelegîndu-se semnul + de adunare între numărul întreg (3) şi partea fracţionară $\left(\frac{2}{5}\right)$. Numărul format dintr-o parte întreagă şi o parte fracţionară se numeşte *număr mixt.*

$\frac{15}{7}$ conţin 2 întregi [15 : 7 = 2 (rest 1)] şi o unitate fracţionară. Scriem $\frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$.

$\frac{17}{6}$ [17 : 6 = 2 (rest 5)]. Aşadar $\frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}$.

Transformarea numărului mixt în fracţie — introducerea întregilor în fracţie. Pentru a introduce întregii în fracţie înmulţim numărul întregilor cu numitorul şi la produs adăugăm numărătorul, iar ca numitor dăm numitorul fracţiei.

Exemple. $2\frac{3}{5}$ Transformăm întregii în cincimi; 1 întreg are 5 cincimi deci 2 întregi vor avea (2 · 5 = 10) 10 cincimi; la 10 cincimi se adaugă 3 cincimi de la fracţie

$2\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5}$; $\quad 2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$

$5\frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 7 + 2}{7}$; $\quad 5\frac{2}{7} = \frac{37}{7}$.

Proprietăţile fracţiilor

1) Dacă înmulţim (împărţim) numărătorul unei fracţii cu un număr natural, fracţia se măreşte (micşorează) de acel număr de ori.

2) Dacă înmulţim (împărţim) numitorul unei fracţii cu un număr natural, fracţia se micşorează (măreşte) de acel număr de ori.

3) Dacă înmulţim şi numărătorul şi numitorul unei fracţii cu acelaşi număr, diferit de zero, obţinem o fracţie echivalentă. Operaţia se numeşte *amplificarea fracţiei.*

Fracţia $\frac{a}{b}$ este echivalentă cu $\frac{am}{bm}$ căci

$$a \cdot bm = b \cdot am.$$

Exemple. $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3}$; $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ căci $2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$.

4) Dacă împărţim, şi numărătorul şi numitorul unei fracţii cu acelaşi număr diferit de zero obţinem o fracţie echivalentă. Operaţia se numeşte *simplificarea fracţiei*.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m} \text{ căci } a(b : m) = b(a : m)$$

Exemple. $\frac{4}{12} = \frac{4 : 2}{12 : 2}; \frac{4}{12} = \frac{2}{6}$ căci $4 \cdot 6 = 2 \cdot 12$.

$\frac{15}{18} = \frac{15 : 3}{18 : 3}; \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$ căci $15 \cdot 6 = 18 \cdot 5$.

O fracţie care nu se poate simplifica (numărătorul şi numitorul nu se împart exact cu un număr diferit de 1, sînt *numere prime între ele*) se numeşte fracţie *ireductibilă*.

Exemple. $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{11}{18}$.

Compararea a două fracţii

a) Fracţii cu acelaşi numitor. Dintre două fracţii care au acelaşi numitor este mai mare fracţia care are numărătorul mai mare (are mai multe unităţi fracţionare de acelaşi fel)

$$\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5}; \quad \frac{7}{11} > \frac{5}{11}.$$

b) Fracţii cu acelaşi numărător. Dintre două fracţii care au acelaşi numărător mai mare este fracţia care are numitorul mai mic (unităţile fracţionare sînt mai mari).

$$\frac{4}{7} > \frac{4}{9}; \quad \frac{5}{13} < \frac{5}{11}.$$

c) Fracţii oarecare. Pentru a compara două fracţii le aducem la acelaşi numitor sau la acelaşi numărător apoi le comparăm.

Observări. 1) O fracţie supraunitară este mai mare decît orice fracţie subunitară.

2) Două fracţii se pot compara uneori mai simplu, comparînd fracţiile care le completează pînă la un întreg.

Exemple. 1) $\frac{12}{13}$ şi $\frac{7}{8}$. La $\frac{12}{13}$ lipseşte $\frac{1}{13}$ pentru a face 1. La $\frac{7}{8}$ lipseşte $\frac{1}{8}$ pentru a face 1. $\frac{1}{13} < \frac{1}{8}$.

Deci $\frac{12}{13} > \frac{7}{8}$, căci fracţiei $\frac{12}{13}$ îi trebuie mai puţin decît fracţiei $\frac{7}{8}$ pentru a forma un întreg.

2) $\frac{11}{15}$ şi $\frac{3}{7}$. La $\frac{11}{15}$ lipsesc $\frac{4}{15}$ pentru a face 1. La $\frac{3}{7}$ lipsesc $\frac{4}{7}$ pentru a face 1. $\frac{4}{15} < \frac{4}{7}$ deci $\frac{11}{15} > \frac{3}{7}$.

Operații cu numere fracționare

1. *Adunarea fracțiilor*. Suma a două fracții care au același numitor $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{b}$ este fracția $\frac{a+c}{b}$;

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}.$$

Adunarea fracțiilor este totdeauna posibilă.

2. *Scăderea fracțiilor*. Scăderea este operația inversă adunării. A scădea o fracție $\frac{c}{b}$ dintr-o fracție $\frac{a}{b}$ înseamnă a găsi o fracție care adunată cu $\frac{c}{b}$ să dea $\frac{a}{b}$.

$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ pentru că

$\frac{a-c}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a-c+c}{b}=\frac{a}{b}.$

Scăderea fracțiilor este posibilă dacă $\frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{b}$ $(a-c\geqslant 0)$.

Elementul neutru la adunarea fracțiilor este 0.

$$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}.$$

Dacă fracțiile nu au același numitor, le înlocuim cu fracții echivalente care au același numitor și apoi le adunăm (scădem).

$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{cb}{db}$ unde numitorul comun este bd(produsul numitorilor).

Proprietățile adunării fracțiilor. Adunarea fracțiilor se reduce la adunarea unor numere naturale deci se bucură de proprietățile adunării numerelor naturale: *comutativitatea* și *asociativitatea*.

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}=\frac{b+a}{d}=\frac{b}{d}+\frac{a}{d}.$$

$$\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}\right)+\frac{c}{d}=\frac{a+b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{(a+b)+c}{d}=\frac{a+(b+c)}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b+c}{d}=\frac{a}{d}+\left(\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\right).$$

3. *Înmulțirea fracțiilor*. Produsul a două fracții $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$ este o fracție $\frac{ac}{bd}$.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Elementul neutru la înmulțire este 1; $\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$.

Înmulțirea este totdeauna posibilă în mulțimea numerelor fracționare.

Observări. 1) Ca și la înmulțirea numerelor întregi $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ se numesc factori.

2) Produsul $\frac{ac}{bd}$ este echivalent cu produsul a două fracții echivalente respectiv cu $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$.

Exemplu. $\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{14}=\frac{6}{84}=\frac{1}{14};\frac{3:3}{6:3}\cdot\frac{2:2}{14:2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{14}$.

3) Produsul unei fracţii $\frac{a}{b}$ cu un număr natural este suma de n termeni egali cu $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b}\cdot n=\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\cdots+\frac{a}{b}}_{n \text{ termeni}}=\frac{a+a+\ldots+a}{b}=\frac{a\cdot n}{b}.$$

Pentru a înmulţi o fracţie cu un număr natural, înmulţim numărătorul cu acel număr şi dăm ca numitor numitorul fracţiei.

4) Utilizăm înmulţirea unui număr cu o fracţie cînd vrem să aflăm acea fracţie din număr.

Exemplu. $\frac{3}{5}$ din 150 este $150\cdot\frac{3}{5}=\frac{150\cdot 3}{5}=90$.

5) Înmulţirea a două numere mixte se reduce la înmulţirea fracţiilor obţinute prin introducerea întregilor în fracţie.

Exemplu. $3\frac{5}{7}\cdot 1\frac{2}{5}=\frac{26}{7}\cdot\frac{7}{5}=\frac{26}{5}$.

Proprietăţile înmulţirii fracţiilor. Înmulţirea fracţiilor reducîndu-se la înmulţirea numerelor naturale, se va bucura de proprietăţile înmulţirii numerelor naturale: comutativitatea şi asociativitatea.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{e}{f}=\frac{a(ce)}{b(df)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{ce}{df}=\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right).$$

Se aplică de asemenea distributivitatea înmulţirii faţă de adunare (scădere)

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\pm\frac{e}{d}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c\pm e}{d}=\frac{a(c\pm e)}{bd}=\frac{ac}{bd}\pm\frac{ae}{bd}.$$

Împărţirea fracţiilor ordinare este operaţie inversă înmulţirii. Cîtul a două fracţii ordinare $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ este totdeauna o fracţie ordinară $\frac{ad}{bc}$ $\left(\frac{c}{d}\neq 0\right)$.

În adevăr, a împărţi o fracţie $\frac{a}{b}$ la fracţia $\frac{c}{d}$, înseamnă a găsi o fracţie $\frac{m}{n}$ astfel încît $\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$.

Fracţia $\frac{m}{n}$ este echivalentă cu $\frac{ad}{bc}$, căci $\frac{c}{d}\cdot\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}$. Am simplificat fracţia prin $(c\cdot d)$.

Regulă. Pentru a împărţi o fracţie $\frac{a}{b}$ la o fracţie $\frac{c}{d}$, înmulţim fracţia $\frac{a}{b}$ cu fracţia $\frac{d}{c}$ (inversa fracţiei $\frac{c}{d}$). Fracţia $\frac{d}{c}$ se obţine din împărţirea $1:\frac{c}{d}$.

Exemple. 1) $\frac{3}{5}:\frac{15}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{15}=\frac{7}{25}$.

2) $\frac{5}{17}:\frac{2}{17}=\frac{5}{17}\cdot\frac{17}{2}=\frac{5}{2}$.

Ştiind că $\frac{2}{5}$ dintr-un număr N valorează 10, să se afle numărul. $N=10:\frac{2}{5}=25$.

Pentru a împărţi două numere mixte introducem întregii în fracţii apoi împărţim fracţiile obţinute.

Exemplu. $1\frac{3}{7}:2\frac{2}{3}=\frac{10}{7}:\frac{8}{3}=\frac{10}{7}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{28}$.

Observări. 1. *Împărţirea unui număr cu 0 (zero).*

a) Dacă a şi b sînt numere pozitive şi $\frac{a}{b}=c$, micşorînd împărţitorul b de un număr de ori, cîtul c se măreşte de acelaşi număr de ori. Dacă micşorăm împărţitorul din ce în ce mai mult, cîtul se măreşte din ce în ce mai mult. Dacă împărţitorul devine foarte mic, foarte aproape de zero, cîtul devine foarte mare, mai mare decît orice număr ales. Zicem că $\frac{a}{b}$ tinde către infinit (∞).

b) Dacă $a<0$ şi $b>0$ micşorînd pe b din ce în ce mai mult $|c|$ se măreşte din ce în ce mai mult iar c se micşorează din ce în ce mai mult.

Cînd b se apropie de zero, $|c|$ tinde către infinit. În acest caz spunem că $\frac{a}{b}$ tinde către $-\infty$ (minus infinit).

Exemple.

1) $1:10=\frac{1}{10}$; $1:1=1$; $1:\frac{1}{10}=10$; $1:\frac{1}{10^3}=1000$; $1:\frac{1}{10^5}=10^5$; $1:\frac{10}{10^6}=10^6$ (un milion); $1:\frac{1}{10^9}=10^9$ (un miliard) $1:\frac{1}{10^{12}}=10^{12}$ (un trilion) ş.a.m.d. $1:\frac{1}{10^n}=10^n$ (n număr natural).

2) $(-1):10=-\frac{1}{10}$; $(-1):\frac{1}{10}=-10$; $(-1):\frac{1}{10^n}=-10^n$.

2. La împărţirea fracţiilor putem împărţi numărătorii între ei şi numitorii între ei, dacă împărţirile se fac exact.

Exemplu. $\frac{18}{25}:\frac{9}{5}=\frac{3}{5}$, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}$. În adevăr $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

$$\frac{a:c}{b:d}=\frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

3. Împărţirea a două fracţii este totdeauna posibilă (dacă împărţitorul este diferit de zero).

Ridicarea unei fracţii la o putere. A ridica o fracţie $\frac{a}{b}$ la o putere cu exponentul n, număr natural, înseamnă a găsi o fracţie $\frac{A}{B}$ astfel ca $\frac{A}{B}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Dacă n este număr natural, avem totdeauna

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

În adevăr, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n \text{ factori}} = \frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$.

Extragerea rădăcinii pătrate dintr-o fracţie. Pentru a extrage rădăcina din fracţia $\frac{a}{b}$, extragem rădăcina pătrată din numărătorul şi numitorul fracţiei

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Putem amplifica fracţia $\frac{a}{b}$ astfel încît numitorul să fie pătrat perfect atunci $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$. Notînd $\sqrt{ab} = c$ (rest r),

avem

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{c}{b}\left(\text{rest } \frac{r}{b^2}\right)$$

Exemple.

1) $\sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $\sqrt{17} = 4$ (rest 1).

$\sqrt{\frac{17}{4}} = 2\left(\text{rest } \frac{1}{4}\right)$. În adevăr $\frac{17}{4} = 2^2 + \frac{1}{4}$.

2) $\sqrt{\frac{13}{5}} = \sqrt{\frac{13\cdot 5}{5^2}} = \frac{\sqrt{65}}{5} = \frac{8}{5}\left(\text{rest } \frac{1}{25}\right)$

În adevăr, $\frac{13}{5} = \frac{64}{25} + \frac{1}{25}$; $\frac{13}{5} = \frac{65}{25}$.

3) $\sqrt{\frac{17}{18}} = \sqrt{\frac{17\cdot 2}{36}} = \frac{\sqrt{34}}{6} = \frac{5}{6}$ rest $\frac{9}{36}$.

În adevăr, $\frac{17}{18} = \frac{25}{36} + \frac{9}{36}$; $\frac{17}{18} = \frac{34}{36}$.

Observare. Dacă nu vedem direct cu ce număr trebuie amplificată fracţia $\frac{a}{b}$ pentru a obţine la numitor un pătrat perfect, este bine să descompunem numitorul în factori scoţînd în evidenţă factorii pătrate perfecte.

Exemple. $\sqrt{\frac{1}{468}} = \sqrt{\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 13}} = \sqrt{\frac{13}{2^2\cdot 3^2\cdot 13^2}} = \frac{\sqrt{13}}{2\cdot 3\cdot 13} = \frac{\sqrt{13}}{78}$.

$$\sqrt{\frac{1}{468}} = \frac{3}{78}\left(\text{rest } \frac{4}{78^2}\right).$$

În adevăr $\frac{1}{468} = \frac{9}{78^2} + \frac{4}{78^2} = \frac{13}{78^2}$.

Numere raționale

Cîtul a două numere întregi $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ se numește număr rațional.

Dacă $|a|$ se împarte exact la $|b|$ atunci $\frac{a}{b}$ este număr întreg. Dacă a și b au același semn, atunci $\frac{a}{b}$ este o fracție pozitivă.

Mulțimea numerelor întregi (Z) este inclusă în mulțimea (Q) a numerelor raționale.
Mulțimea fracțiilor pozitive este inclusă în mulțimea (Q) a numerelor raționale.
Între mulțimea numerelor naturale (N), mulțimea numerelor întregi (Z) și mulțimea numerelor raționale (Q) există relații de incluziune

$$N \subset Z \subset Q.$$

Două numere raționale $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ sînt echivalente dacă $ad = cb$.

Operații cu numere raționale

Suma a două numere raționale $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ este totdeauna un număr rațional echivalent cu $\frac{ad+bc}{bd}$.

Diferența a două numere raționale $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ este totdeauna un număr rațional echivalent cu $\frac{ad-bc}{bd}$.

Suma numerelor raționale reducîndu-se la o sumă de numere întregi (numărătorii numerelor raționale aduse la același numitor) se bucură de proprietățile adunării numerelor întregi (comutativitatea, asociativitatea).

Elementul neutru față de adunarea numerelor raționale este 0 (zero).

Produsul a două numere raționale $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ este totdeauna un număr rațional echivalent cu $\frac{ac}{bd}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Înmulțirea numerelor raționale se bucură de proprietățile înmulțirii numerelor întregi: comutativitatea, asociativitatea, distributivitatea față de adunare și scădere.

Elementul neutru față de înmulțirea numerelor raționale este numărul 1.

Cîtul a două numere raționale $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ $\left(\frac{c}{d} \neq 0\right)$ este totdeauna un număr rațional echivalent cu $\frac{ad}{bc}$.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

A ridica un număr raţional la o putere n (număr natural) înseamnă a face înmulţirea

$$\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n \text{ factori}}=\frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}=\frac{a^n}{b^n}. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Deci puterea unui număr raţional este tot un număr raţional.

Exemple. $\left(\frac{-3}{5}\right)^2=\frac{(-3)^2}{5^2}=\frac{9}{25}$;

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^3=\frac{(-3)^3}{5^3}=\frac{-27}{125}.$$

În mulţimea numerelor raţionale nu putem extrage rădăcina pătrată dintr-un număr negativ căci orice număr raţional ridicat la pătrat este pozitiv.

Ordinea operaţiilor. În efectuarea calculelor cu numere raţionale păstrăm convenţiile făcute la operaţiile cu numere naturale.

Exemple.

1) $E=(-15)+(-3)\cdot(-2)-15:(-3)$. Eefectuăm operaţiile de ordinul II.

$E=(-15)+(+6)-(-5)$. Efectuăm operaţiile de ordinul I

$E=-15+6+5=-4$.

2) $E=(-3)^3-(-10):(+5)+(-2)\cdot(-3)$. Efectuăm operaţiile de ordinul III apoi pe cele de ordinul II.

$E=-27-(-2)+(+6)$. Efectuăm operaţiile de ordinul I.

$E=-27+2+6=-19$

3) $E=(-2)^2:4-(5)^2\cdot(-2)^3+(-5)(-2)^2$. Efectuăm ridicările la putere.

$E=4:4-(25)(-8)+(-5)\cdot4$. Efectuăm înmulţirile şi împărţirile.

$E=1-(-200)-20$. Efectuăm scăderea şi adunarea.

$E=1+200-20=181$.

4) $E=\{5-[-7+(-3)^2(-2)]\}:(-6)$.

Avem de împărţit o diferenţă la un număr. Ultima operaţie pe care o efectuăm este împărţirea. În acoladă descăzutul este un număr, scăzătorul o sumă.

$$-7+(-3)^2(-2)=-7+(+9)(-2)=-7-18.$$

Expresia E devine

$E=[5-(-7-18)]:(-6)$. Efectuăm diferenţa.

$E=(5+7+18):(-6)$. Efectuăm suma din paranteză.

$E=+30:(-6)=-5$.

5) $E=-15-\{(-3)^2+[(-5)\cdot(-2)-(-2)^3](-3)\}$.

Avem de efectuat o diferenţă (ultima operaţie este o scădere). Descăzutul este un număr; scăzătorul este o sumă. Efectuăm această sumă calculînd mai întîi operaţiile de ordinul III şi II apoi pe cele de ordinul I.

$E=-15-\{(-3)^2+[10-(-8)]\cdot(-3)\}$;

$E=-15-[(-3)^2+(10+8)\cdot(-3)]$.

Acum avem de calculat o diferență al cărui scăzător este o sumă algebrică (ultima operație este de adunare). Efectuăm operațiile de ordinul III și suma din paranteza mică.

$E = -15 - [9 + 18 \cdot (-3)]$. Efectuăm calculele din paranteză.
$E = -15 - (9 - 54)$. Efectuăm scăderea unei sume dintr-un număr.
$E = -15 - 9 + 54 = +30$.

Reprezentarea numerelor raționale pe axă

Numim axă, o dreaptă pe care s-au fixat: un punct O numit origine, un sens pozitiv de parcurgere a axei și un segment luat ca unitate de măsură.

Punctului O îi corespunde numărul 0 (zero); punctului A așezat pe axă la dreapta originei, la o distanță egală cu unitatea de măsură aleasă, îi corespunde numărul 1 ș.a.m.d. Fiecărui număr natural îi corespunde un singur punct pe axă.

Punctele corespunzătoare numerelor negative $-1, -2, -3, \ldots$ sînt simetrice față de origine cu punctele corespunzătoare numerelor $1, 2, 3, \ldots$

Fiecărui număr întreg îi corespunde un punct pe axă. Există însă puncte pe axă care nu corespund unor numere întregi.

Orice număr rațional, $\frac{a}{b}$, poate fi reprezentat printr-un punct pe axă.

De exemplu, $\frac{3}{7}$ se reprezintă împărțind segmentul OA în 7 părți egale și luînd 3 părți; numărul $-\frac{3}{7}$ corespunde simetricului punctului $\frac{3}{7}$ față de origine.

Observare. Există însă puncte pe axă cărora nu le corespund numere raționale (unitatea de măsură fiind dată). De exemplu, punctului aflat la o distanță egală cu diagonala pătratului cu latura cît unitatea de măsură, nu-i corespunde un număr rațional ci numărul $\sqrt{2}$ care nu este de forma $\frac{a}{b}$.

Numerele care nu pot fi scrise sub forma unui cît de două numere întregi se numesc numere *iraționale*. Exemplu. $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$, π, $-\sqrt{7}\ldots$

Mulțimea numerelor raționale reunită cu mulțimea numerelor iraționale formează mulțimea numerelor reale, R.

Între mulțimea numerelor reale și mulțimea punctelor axei se poate stabili o corespondență biunivocă.

Compararea numerelor raționale

Două numere raționale pot fi egale sau diferite.

Dacă $a = b$ înseamnă că a și b sînt reprezentate pe axa numerelor prin același punct.

Dacă $a \neq b$ se poate ca: 1) a să fie mai mic decît b; $a < b$. În acest caz b este situat pe axă la dreapta punctului care îl reprezintă pe a.

2) a mai mare decît b; $a > b$. În acest caz b este situat pe axă la stînga lui a. $a > b$ sau $a < b$ se numesc inegalități.

Egalitățile și inegalitățile se bucură de unele proprietăți utile în calcule:

1) Dacă adunăm sau scădem un număr în ambii membri ai unei egalități obținem tot o egalitate.

1) Dacă adunăm sau scădem un număr în ambii membri ai unei inegalități obținem o inegalitate de același sens.

Exemple. $-2=-3+1.$

$-2+1=-3+1+1;\quad -1=-1;$

$-2-5=-3+1-5;\quad -7=-7.$

2) Dacă adunăm membru cu membru mai multe egalităţi, obţinem tot o egalitate.

Exemplu. $5=3+2,$

$$\begin{array}{r} -3=-1-2 \\ -1=-2+1 \\ \hline \end{array}$$

$5-3-1=3+2-1-2-2+1.$

$1=1.$

3) Dacă înmulţim sau împărţim ambii membri ai unei egalităţi cu un număr (diferit de zero), se obţine tot o egalitate.

Exemplu. $15=10+5;$

$15\cdot 2=(10+5)\cdot 2;$

$15:5=(10+5):5.$

Exemple. $5>3.$

$5+1>3+1;\ 6>4;$

$5-3>3-3;\quad 2>0.$

2) Dacă adunăm membru cu membru două sau mai multe inegalităţi de acelaşi sens, obţinem o inegalitate de acelaşi sens.

Exemplu. $5>3$

$$\begin{array}{r} -1>-2 \\ 2>-1 \\ \hline 5-1+2>3-2-1 \\ 6>0 \end{array}$$

3) Dacă înmulţim sau împărţim ambii membri ai unei inegalităţi cu un număr pozitiv, inegalitatea îşi păstrează sensul. Dacă înmulţim sau împărţim ambii membri ai unei inegalităţi cu un număr negativ, inegalitatea îşi schimbă sensul.

Exemplu. $15>10.$

$15:5>10:5;\quad 3>2;$

$15:(-5)<10:(-5);\quad -3<-2.$

II
Numerația

Sistem zecimal de numerație

1° Pentru scrierea unui număr în sistemul zecimal se folosesc zece semne sau cifre.

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Numerele 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 sînt unități simple (de ordinul I).

2° Zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior. O grupă de zece unități simple (de ordinul I) formează o zece (o unitate de ordinul II); o grupă de zece zeci (unități de ordinul II) formează o sută (o unitate de ordinul III) ș.a.m.d.

3° O cifră poate reprezenta unități de diferite ordine după locul pe care-l ocupă în număr. De exemplu, în numărul 72 563 cifra 3 reprezintă unități simple, cifra 6, zeci, cifra 5, sute, cifra 2, unități de mii cifra 7, zeci de mii.

$$72563 = 7\,0000 + 2\,000 + 500 + 60 + 3$$

sau

$$72563 = 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3.$$

În general un număr natural N (în baza 10) care are în ordine de la dreapta spre stînga cifrele a_0, a_1, a_2 a_3, $a_4,\ldots,a_n$ se poate scrie

$$N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0.$$

4° Trei ordine succesive pornind de la dreapta spre stînga (unități, zeci, sute) formează o clasă (clasa unităților, clasa miilor, clasa milioanelor, clasa miliardelor; clasa trilioanelor ș.a.m.d.).

Observare. Există și alte sisteme de numerație care au altă bază. Pentru a scrie numerele într-o anumită bază folosim atîtea semne (cifre) cîte unități are baza: un număr de unități (de un anumit ordin) egal cu baza formează o unitate de ordin superior.

De exemplu, pentru scrierea numerelor în baza 2 folosim 2 semne (cifre): 0 și 1; 2 unități simple formează în baza 2, o unitate de ordinul II și se scrie 10.

Dacă avem o mulțime cu 7 elemente putem forma 3 grupe de cîte două elemente și rămîne un element negrupat. Obținem deci o unitate de ordinul I și 3 unități de ordinul II. Grupăm două unități de ordinul II (două grupe de cîte două elemente) și rămîne o unitate de ordinul II negrupată, se obține deci o unitate de ordinul II și o unitate de ordinul III. Numărul 7 se scrie 111 (în sistemul cu bază 2).

Dacă baza este 9 vom folosi 9 semne (cifre) : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. De exemplu numărul 112 se scrie (în baza 9) 134 căci $112 = 9^2 + 3 \cdot 9 + 4$.

Dacă baza este mai mare decît 10 vom introduce semne noi. De exemplu, dacă baza sistemului de numeraţie este 12 vom introduce, în afara celor 10 semne cunoscute, alte două semne noi, de exemplu α şi β. Numărul 275 se scrie (în baza 12)$1\,\alpha\,\beta$ căci $275 = 12^2 + 10 \cdot 12 + 11$; iar 10 este notat α şi 11 este notat β.

Scrierea şi citirea numerelor naturale

Pentru a scrie un număr natural scriem cifrele în ordine de la stînga la dreapta începînd cu ordinul cel mai mare al numărului. Se obişnuieşte ca între diferitele clase ale numărului să se lase un spaţiu. De exemplu: 72 123 256.

Citirea numerelor se face pe ordine şi clase începînd de la stînga la dreapta. 72 123 256 se citeşte 72 milioane 123 mii 256.

2 056 123 001 123 se citeşte 2 trilioane, 56 miliarde, 123 milioane, o mie, 123

Numere zecimale

1. Fracţia ordinară care are numitorul o putere a lui 10 cu exponent număr natural se numeşte *fracţie zecimală* $\frac{a}{10^n}$ (a şi n numere naturale).

2. Orice fracţie ordinară ireductibilă echivalentă cu o fracţie zecimală, are la numitor numai factorii 2 şi 5 la diferite puteri.

Exemple. $\frac{1}{2}$ este echivalentă cu $\frac{5}{10}$.

$\frac{1}{8}$ este echivalentă cu $\frac{125}{1\,000}$.

$\frac{1}{7}$ nu poate fi scrisă ca o fracţie cu numitorul 10^k căci nu există un număr care înmulţit cu 7 să ne dea o putere a lui 10.

$\frac{2}{25}$ este echivalentă cu $\frac{8}{100}$.

Observare. Fracţia $\frac{3}{6}$ are numitorul 6; dar prin simplificare cu 3 obţinem fracţia echivalentă $\frac{1}{2}$ care este echivalentă cu fracţia zecimală $\frac{5}{10}$.

O fracţie zecimală poate fi scrisă fără numitor, ca *număr zecimal*, păstrînd convenţiile făcute la scrierea numerelor naturale în sistemul zecimal.

Regulă. Pentru a scrie un număr zecimal, (fracţie zecimală scrisă fără numitor) scriem numărătorul fracţiei apoi despărţim de la dreapta la stînga atîtea cifre cît este exponentul lui 10 de la numitor (cîte zerouri are numitorul) completînd cu zerouri dacă este cazul.

Exemple. $\frac{7}{10}$ se scrie 0,7; $\frac{3}{100}$ se scrie 0,03; $\frac{7}{1\,000}$ se scrie 0,007; $\frac{15}{10^4}$ se scrie 0,0015; $\frac{75}{10}$ se scrie 7,5; $\frac{125}{100} = 1,25$ ş.a.m.d.

3*

Prima cifră după virgulă (la dreapta unităţilor simple)reprezintă zecimi (a zecea parte din unitate); a doua-sutimi (a suta parte din unitate); a treia — miimi, a patra — zecimi de miimi, apoi sutimi de miimi, milionimi, zecimi de milionimi ş.a.m.d.

Citirea numerelor zecimale. a) Citim partea întreagă apoi toată partea zecimală numind ordinul ultimei cifre.

Exemplu. 15,3256; 15 întregi şi 3 256 zecimi de miimi.

b) Citim partea întreagă apoi partea zecimală în grupe de cîte 3 cifre începînd de la virgulă.

Exemplu. 15 întregi, 325 miimi şi 6 zecimi de miimi

c) Citim partea întreagă apoi partea zecimală cifră cu cifră.

Exemplu. 15 întregi, 3 zecimi, 2 sutimi, 5 miimi, 6 zecimi de miimi.

d) Citim tot numărul fără să ţinem seama de virgulă şi numim după ordinul ultimei cifre.

Exemplu. 153 256 zecimi de miimi.

Înmulţirea (împărţirea) unui număr zecimal cu o putere a lui 10

Regulă. Pentru a înmulţi (împărţi) un număr zecimal cu o putere (cu exponent număr natural) a lui 10 *mutăm virgula spre dreapta (spre stînga) după atîtea cifre, cît indică exponentul puterii lui* 10.

Exemple. 1) $2,7 \cdot 10 = 27$; 2) $0,15 \cdot 1000 = 150$; 3) $2,15 : 10 = 0,215$; 4) $125,7 : 100 = 1,257$

Transformarea fracţiilor ordinare în numere zecimale

Fracţia $\frac{a}{b}$ reprezintă cîtul numerelor naturale a şi b.

Regulă. Pentru a transforma o fracţie ordinară în număr zecimal se efectuează împărţirea $a : b$.

Vom întîlni următoarele cazuri:

1. Fracţia $\frac{a}{b}$ este echivalentă cu o fracţie cu numitorul 10^n; în acest caz continuînd împărţirea ajungem să găsim restul 0. Acest lucru se întîmplă dacă fracţia (ireductibilă) are la numitor doar factorii 2 şi 5.

Exemple. $\frac{2}{5} = 0,4$; $\frac{1}{8} = 0,125$.

Obţinem aceleaşi rezultate dacă amplificăm fiecare fracţie astfel încît la numitor să avem factorii 2 şi 5 la acelaşi exponent.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2}; \quad \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{125}{1\,000} = 0,125$$

2. Fracţia ireductibilă $\frac{a}{b}$ nu este echivalentă cu o fracţie cu numitorul o putere a lui 10 (la numitor există şi alţi factori în afară de 2 şi 5). În acest caz împărţirea nu se termină niciodată oricîte zecimale am scoate la cît, dar există o grupă de cifre care se repetă necontenit — partea periodică. Dacă perioada începe imediat după virgulă, avem o fracţie periodică simplă; dacă între virgulă şi prima perioadă există o parte neperiodică, avem o fracţie periodică mixtă.

În practică, perioada nu se trece decît o singură dată, în paranteză.

Exemple. 1) $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots, \frac{1}{3} = 0{,}(3)$.

2) $\frac{2}{3} = 0{,}(6)$.

3) $\frac{5}{7} = 0{,}(714285)$;

```
  5 | 7
 50 | 0,714285
  10
   30
    20
     60
      40
       5
```

La împărţirea 5 : 7 am obţinut resturile 5, 1,3,2,6,4,5. Dacă am continua împărţirea, resturile şi deci şi cifrele cîtului s-ar repeta. De la un moment dat, resturile se vor repeta întotdeauna căci ele nu pot fi decît mai mici decît împărţitorul.

În cazul nostru puteam obţine cel mult resturile 1,2,3,4,5,6 pe care le-am obţinut într-o ordine oarecare.

4) $\frac{5}{6} = 0{,}8(3)$;

```
  5 | 6
 50 | 0,83
  20
   2
```

Am obţinut resturile 5,2,2 deci se repetă restul 2 şi cifra 3 la cît; 3 este perioada.

5) $\frac{63}{22} = 2\frac{19}{22} = 2{,}8(63)$;

```
  19 | 22
 190 | 0,863.
  140
    80
    14
```

Am obţinut resturile 19, 14, 8, 14; se repetă restul 14 deci 6 este prima cifră a perioadei.

Regula. Pentru a transforma o fracţie ireductibilă în număr zecimal cercetăm dacă numitorul are ca factori pe 2 sau 5.

a) *Dacă numitorul are ca factori primi numai 2 sau 5 (sau unul din ei) atunci fracţia este echivalentă cu un număr zecimal cu un număr finit de zecimale.*

b) *Dacă numitorul se descompune în produs de factori primi diferiţi de 2 şi 5, atunci fracţia se transformă într-un număr zecimal periodic simplu (perioada începe imediat după virgulă).*

c) *Dacă numitorul are ca factori pe 2 sau 5 (sau pe amîndoi) dar mai are şi alţi factori primi diferiţi de 2 sau 5 fracţia se transformă în număr zecimal periodic mixt (perioada nu începe imediat după virgulă).*

Transformarea numerelor zecimale periodice în fracţii ordinare

1. *Regulă. Un număr zecimal subunitar, periodic simplu, este echivalent cu o fracţie ordinară care are la numărător perioada iar la numitor un număr format din atîtea cifre 9 cîte cifre are perioada.*

Exemple.

1) $0,(7) = \frac{7}{9}$.

În adevăr dacă notăm $A = 0,(7)$ avem $10A = 7,(7)$ de unde, prin scădere:

$10A - A = 7,(7) - 0,(7)$; $9A = 7$; $A = \frac{7}{9}$.

2) $0,(32) = \frac{32}{99}$.

În adevăr dacă $A = 0,(32)$; $100A = 32,(32)$ de unde, prin scădere:

$100A - A = 32,(32) - 0,(32)$; $99A = 32$; $A = \frac{32}{99}$.

3) $0,(312) = \frac{312}{999}$.

În adevăr, dacă $A = 0,(312)$ avem $1000\,A = 312,(312)$.
Prin scădere

$$999A = 312; \qquad A = \frac{312}{999}.$$

În general dacă notăm cu $a_1a_2\ldots a_n$ cifrele cuprinse în perioadă

$A = 0,(a_1a_2a_3\ldots a_n)$;

$10^nA = a_1a_2a_3\ldots a_n,(a_1a_2a_3\ldots a_n)$ prin scădere: $A = \frac{a_1a_2\ldots a_n}{10^n-1}$

4) $$1,(3) = 1 + 0,(3) = 1\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3}.$$

$$2,(31) = 2 + 0,(31) = 2\frac{31}{99}.$$

Observare. Regula transformării mai poate fi justificată astfel:

$$\frac{1}{9} = 0,(1); \ \frac{1}{99} = 0,(01); \ \frac{1}{999} = 0,(001) \text{ ş.a.m.d.}$$

Dar dacă înmulţim ambele fracţii cu acelaşi număr obţinem tot fracţii echivalente.

De exemplu: $\frac{1}{9} = 0,(1)$ deci $\frac{5}{9} = 0,(5)$

$$\frac{1}{9999} = 0,(0001) \qquad \text{deci} \quad \frac{7}{9999} = 0,(0007)$$

$$\frac{1}{999} = 0,(001) \qquad \text{deci} \quad \frac{11}{999} = 0,(011);$$

$$2\frac{13}{999} = 2,(013); \qquad 1\frac{17}{99} = 1,(17) \text{ ş.a.m.d.}$$

2. *Regulă. Un număr zecimal subunitar periodic mixt este echivalent cu o fracţie ordinară care are la numărător diferenţa dintre numărul de la partea zecimală (format de partea neperiodică şi de perioadă) şi partea neperiodică, iar la numitor numărul format de atîtea cifre 9 cîte cifre are perioada urmat de atîtea zerouri cîte cifre are partea neperiodică.*

Exemple.

1) $0,8(3) = \frac{83-8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$.

În adevăr, considerăm numărul zecimal periodic mixt $A = 0,8(3)$ şi $A = \frac{p}{q}$ este fracţia ordinară echivalentă. Înmulţim numărul A cu 10 pentru a obţine un număr zecimal periodic simplu.

$10A = 8,(3); \quad 100A = 83,(3).$

Scăzînd membru cu membru cele două egalităţi

$100A - 10A = 83,(3) - 8,(3).$

$90A = 83 - 8; \quad A = \frac{83-8}{90}; \quad A = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}.$

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{6}.$$

Fracţia $\frac{p}{q}$ este echivalentă cu o fracţie care are numărătorul, diferenţa dintre numărul format la partea zecimală pînă la a doua perioadă şi partea neperiodică iar ca numitor, 90 (perioada are o cifră deci luăm o singură cifră 9 şi partea neperiodică o cifră, deci 9 este urmat de un singur zero). Fracţia $\frac{p}{q}$ se numeşte *fracţie generatoare* a numărului zecimal periodic dat.

2) $A = 2,17(5); \qquad A = 2 + 0,17(5)$

Găsim fracţia B echivalentă cu numărul zecimal periodic $0,17(5)$. Pentru a obţine fracţia B înmulţim numărul $0,17(5)$ cu 100 (partea neperiodică are două cifre) apoi rezultatul cu 10 (perioada o cifră).

$B = 0,17(5); \quad 100B = 17,(5); \quad 1\,000B = 175,(5),$

de unde prin scădere $900B = 175 - 17;$

$$B = \frac{175-17}{900}.$$

Deci $0,17(5) = \frac{175-17}{900}$.

9 este urmat de două zerouri (cîte cifre are partea neperiodică). $0{,}17\ (5) = \frac{158}{900}$;

$2{,}17\ (5) = 2\ \frac{79}{450}$; $\quad 2\ \frac{79}{450}$ este fracţia generatoare.

3) $\quad A = 3{,}2\ (31)$; $\qquad A = 3 + 0{,}2\ (31)$.

Pentru a obţine un număr zecimal periodic simplu înmulţim cu 10 (partea neperiodică are o cifră), apoi rezultatul cu 100 (partea periodică are două cifre):

$B = 0{,}2\ (31)$; $10B = 2,\ (31)$; $1\,000B = 231,\ (31)$ de unde $1\,000B - 10B = 231 - 2$; $990B = 231 - 2$; $B = \frac{231 - 2}{990}$; $A = 3\ \frac{229}{990}$.

4) $A = 0{,}231\ (527)$.

$1\,000A = 231,\ (527)$; $1\,000\,000\,A = 231\,527,\ (527)$;

$1\,000\,000\,A - 1\,000\ \ A = 231\,527 - 231$; $999\,000\,A = 231\,527 - 231$.

$$A = \frac{231\,527 - 231}{999\,000}; \qquad A = \frac{231\,296}{999\,000}.$$

5) $A = 1{,}1\ \ (234)$;

$$A = 1\ \frac{1\,234 - 1}{9\,990} = 1\frac{1\,233}{9\,990};$$

$$A = 1\ \frac{1\,233}{9\,990} = 1\frac{137}{1\,110}.$$

III
Expresii algebrice

a) *Folosirea literelor în algebră.* Pentru generalizarea unor proprietăţi stabilite pentru numere am înlocuit numerele prin litere. În aritmetică prin a,b,c înţelegem numere reale pozitive; în algebră înţelegem orice număr real (pozitiv, zero sau negativ).

Expresiile de forma $a + b + c$, ab, $-5a^3b$, $\frac{1-2x}{2a}$ sînt expresii algebrice.

Expresii algebrice particulare.

1. *Monomul* este un produs de numere reale dintre care unele sînt reprezentate prin litere. Partea numerică se numeşte coeficient, iar produsul numerelor exprimate prin litere se numeşte parte literală.

Exemple. Monomul $-5a^3b$ are coeficientul (-5) partea literală a^3b. Monomul a^2b^2 are coeficientul 1 (care nu a mai fost scris) iar partea literală a^2b^2. Gradul monomului în raport cu o literă este exponentul literei respective. Gradul monomului în raport cu anumite litere care figurează ca factori ai monomului, este egal cu suma exponenţilor acestor litere.

Exemplu. Monomul $-5a^3b$ este de gradul 3 în raport cu a, de gradul 1 în raport cu b; de gradul 4, $(3+1)$ în raport cu ambele litere. Monomul a^5b^3c este de gradul 5 în raport cu a; de gradul 3 în raport cu b; de gradul 1 în raport cu c; de gradul 8, $(5+3)$ în raport cu a şi b; de gradul 9, $(5+3+1)$ în raport cu a,b,c.

Monoame asemenea sînt monoamele care au aceeaşi parte literală (aceleaşi litere ridicate la aceleaşi puteri). Exemplu. $-5a^3b$; $20\,a^3b$, $\frac{1}{5}\,a^3b$ sînt monoame asemenea pentru că au aceleaşi litere (a,b) ridicate la aceleaşi puteri: a la puterea a treia b la puterea întîi. Monoamele $-5a^3b$, $4a^2b$ nu sînt asemenea căci a nu este la aceeaşi putere în ambele monoame; $2a^3b^2$ şi $2a^2b^3$ nu sînt asemenea pentru că literele de aceeaşi fel nu sînt ridicate la aceeaşi putere (a^3, a^2) (b^2, b^3); $2a^3b^2c$ şi $2a^3b^2$ nu sînt asemenea pentru că nu au aceeaşi parte literală. Al doilea monom nu-l are pe c ca factor.

Observare. Orice număr real poate fi considerat ca un monom care are drept coeficient acest număr iar la partea literală orice literă cu exponentul 0 $(a^0 = 1)$. Un număr real va fi deci un monom de gradul 0.

Orice monom adunat cu 0 este egal cu acel monom $A + 0 = A$.

Orice monom înmulţit cu 1 este egal cu acel monom $A \cdot 1 = A$.

Orice monom înmulţit cu (-1) este monomul opus (monom care are aceeaşi parte literală şi coeficienţii numere opuse).

Suma a două sau mai multe monoame este o sumă algebrică în care termenii sînt produse de numere reale.

A scădea două monoame înseamnă a scădea două numere reale; se adună la descăzut numărul opus scăzătorului.

Exemple. Să se facă suma și diferența monoamelor:

a) $-5a^3b$; $2a^2b$; b) $7xy^3$, $-3x^2y^2$.

a) $S = -5a^3b + 2a^2b$; $D = -5a^3b - 2a^2b$ (opusul monomului $2a^2b$ este $-2a^2b$).

b) $S = 7xy^3 - 3x^2y^2$; $D = 7xy^3 + 3x^2y^2$.

Polinom. Numim polinom suma algebrică a mai multor monoame.

Un polinom cu doi termeni se numește binom; cu trei termeni trinom.

Gradul unui polinom este același cu al monomului care are gradul cel mai mare.

Polinomul $P = 5a^3b + 7a^2b^2 - 5ab^3$ este de gradul 3 în raport cu a; de gradul 3 în raport cu b; de gradul 4 ($3 + 1$; $2 + 2$; $1 + 3$) în raport cu a și b.

Polinomul $P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 6x^4 + 9$ este de gradul 4 (cel mai mare exponent al literei x este 4).

Dacă polinomul cuprinde mai multe litere și nu se specifică în raport cu ce literă se cere să se stabilească gradul polinomului, atunci se consideră gradul în raport cu toate literele.

Se numește *polinom omogen*, polinomul în care toți termenii au același grad.

Exemplu. $P(x,y) = 5x^2y - 12xy^2 + x^3 - 5y^3$ este polinom omogen de gradul 3 căci toți termenii sînt de gradul 3.

Se numește *polinom ordonat*, polinomul în care termenii sînt ordonați după exponenții aceleiași litere — crescător dacă exponenții sînt în ordine crescătoare și descrescător dacă exponenții sînt în ordine descrescătoare.

Exemplu. $P(x,y) = x^3 - 5x^2y + 7xy^2 - y^3$ este ordonat după puterile descrescătoare ale lui x și ordonat după puterile crescătoare ale lui y.

Strîngerea termenilor asemenea. Dacă într-un polinom există termeni asemenea ei se pot strînge într-un singur termen aplicînd proprietățile operațiilor cu numere reale: comutativitatea, asociativitatea și distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere.

Exemplu. $P = -5a^3b + 2a^2b + 6a^3b - 2a^2b$.

$P = (-5a^3b + 6a^3b) + (2a^2b - 2a^2b)$ Am aplicat comutativitatea și asociativitatea

$P = a^3b(-5 + 6) + a^2b(2 - 2)$ căci $ma + mb = m(a + b)$.

$P = a^3b$.

Doi termeni asemenea opuși (cu coeficienți numere opuse) se reduc.

A strînge termenii asemenea înseamnă a înmulți factorii literali cu suma algebrică a coeficienților.

Exemple. $-5a^3b + 2a^3b = (-5 + 2) \cdot a^3b = -3a^3b$.

$$a^2b - a^2b + 5a^2b - 2a^2b = (1 - 1 + 5 - 2)a^2b = 3a^2b.$$

În practică înainte de a face suma algebrică a coeficienților reducem termenii asemenea opuși

$$a^2b - a^2b + 5a^2b - 2a^2b = 3a^2b.$$

Observare. Dacă polinomul are mai mulți termeni putem sublinia cu o linie, cu două linii ș.a.m.d. termenii asemenea pentru a ușura strîngerea lor.

Exemplu. $P = -5a^3b + 7a^2b^2 - 5ab^2 + 2a^3b - 7ab^2 + 3ab - 7a^2b^2 + 12a^3b$.

Stabilim termenii asemenea: $-5a^3b$, $2a^3b$, $12a^3b$ şi-i subliniem cu cîte o linie; $7a^2b^2 - 7a^2b^2 = 0$ (termeni opuşi): $-5ab^2$, $-7ab^2$ îi subliniem cu două linii. Apoi strîngem termenii asemenea

$$P = 9a^3b - 12ab^2 + 3ab.$$

Valoarea numerică a unui polinom este numărul obţinut efectuînd calculele după ce literele polinomului au fost înlocuite cu valori numerice date.

Exemple.

1) $-5a^2b$ pentru $a = -2$, $b = -1$ are valoarea numerică

$$(-5)\cdot(-2)^2\cdot(-1) = (-5)\cdot 4\cdot(-1) = 20$$

pentru $a = -\frac{2}{3}$, $b = 3$, monomul dat are valoarea numerică

$$-5\left(-\frac{2}{3}\right)^2(3) = -5\cdot\frac{4}{9}\cdot 3 = -\frac{20}{3}$$

pentru $a = -1$, $b = \frac{1}{5}$ monomul dat are valoarea numerică

$$(-5)\cdot(-1)^2\cdot\frac{1}{5} = -5\cdot\frac{1}{5} = -1.$$

Valoarea numerică a unui polinom depinde de valorile date literelor care-l compun. În cazul nostru pentru fiecare pereche de numere aleasă am obţinut altă valoare numerică pentru monomul dat. Un polinom are o mulţime nesfîrşită de valori numerice.

2) $P(a, b) = -5a^3b + 7a^2b^2 - 3a + 5$.

Să se calculeze:

a) $P(-1,2)$, valoarea numerică a polinomului pentru $a = -1$, $b = 2$.
b) $P(0,-1)$, valoarea numerică a polinomului pentru $a = 0$, $b = -1$.
c) $P(-1,0)$, valoarea numerică a polinomului pentru $a = -1$, $b = 0$.

a) $P(-1,2) = -5\cdot(-1)^3\cdot 2 + 7\cdot(-1)^2\cdot 2^2 - 3(-1) + 5$,
$P(-1,2) = (-5)(-1)\cdot 2 + 28 + 3 + 5 = 46$.
b) $P(0,-1) = 5$. Toţi factorii care-l conţin pe $a(a = 0)$ se anulează
c) $P(-1,0) = -3\ (-1) + 5 = 3 + 5 = 8$.
Factorii care-l conţin pe $b(b = 0)$ s-au anulat.

Polinoame identice. Numim polinoame identice, polinoamele care au valori numerice egale pentru orice valori date literelor pe care le cuprind.

Exemple.

1) $P(x) = x^2 - (x-1)^2$ şi $Q(x) = 2x - 1$

sînt polinoame identice. Verificăm pentru cîteva valori date lui x.

$x = 1$,	$P(1) = 1$,	$Q(1) = 2 - 1 = 1$.
$x = 0$,	$P(0) = -1$,	$Q(0) = -1$.
$x = -1$,	$P(-1) = 1 - 4 = -3$,	$Q(-1) = -2 - 1 = -3$.
$x = \frac{1}{2}$,	$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$	$Q\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0$ ş.a.m.d.

Orice valoare am da lui x cele două polinoame vor avea valorile numerice egale.

2) $P(a,b) = 5\,a^3b - 7ab^2 + 5a^3b$; $\qquad Q(a,b) = ab(10a^2 - 7b)$

sînt polinoame identice.

Verificare: $a = 1, \quad b = -1, \quad P(1,-1) = -5 - 7 - 5 = -17,$
$a = -1 \quad b = 1 \quad P(-1,1) = -5 + 7 - 5 = -3,$
$a = 1 \quad b = 2 \quad P(1,2) = 10 - 28 + 10 = -8$

$$Q(1,-1) = -(10 + 7) = -17.$$
$$Q(-1,1) = -(10 - 7) = -3.$$
$$Q(1,2) = 2(10 - 14) = -8.$$

ş.a.m.d.

Identitate. Numim identitate egalitatea a două polinoame identice. O identitate este deci verificată de orice valori date literelor pe care le cuprinde.

Exemple. 1) $x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$.

2) $5a^3b - 7ab^2 + 5a^3b = ab\,(10a^2 - 7b)$.

3) $3x^3 + 6x^2 + 3x = 3x(x^2 + 2x + 1)$.

Adunarea polinoamelor. Adunarea a două polinoame este adunarea a două sume algebrice.

Exemple. 1) $\qquad P(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 4,$

$\qquad Q(x) = -5x^2 + 7x^3 - 8x + 5.$

$$P(x) + Q(x) = (5x^3 - 7x^2 + 3x - 4) + (-5x^2 + 7x^3 - 8x + 5).$$

Aplicînd regulile cunoscute de la sumele algebrice desfacem parantezele

$$P(x) + Q(x) = \underline{5x^3} - \underline{\underline{7x^2}} + \underline{\underline{\underline{3x}}} - 4 - \underline{\underline{5x^2}} + \underline{7x^3} - \underline{\underline{\underline{8x}}} + 5$$

Efectuăm strîngerea termenilor asemenea

$$P(x) + Q(x) = 12x^3 - 12x^2 - 5x + 1.$$

2) $P(a,b) = 5a^3b + 7a^2b^2 - 5b^4 + 7ab^3,$

$Q(a,b) = -8a^2b^2 + 5b^4 - 7a^3b - b.$

$$P(a,b) + Q(a,b) = (5a^3b + 7a^2b^2 - 5b^4 + 7ab^3) + (-8a^2b^2 + 5b^4 - 7a^3b - b).$$

Desfacem parantezele

$$P(a,b) + Q(a,b) = \underline{5a^3b} + \underline{\underline{7a^2b^2}} - 5b^4 + 7ab^3 - \underline{\underline{8a^2b^2}} + 5b^4 - \underline{7a^3\,b} - b.$$

Strîngem termenii asemenea

$$P(a,b) + Q(a,b) = -2a^3b - a^2b^2 + 7ab^3 - b.$$

În practică nu mai scriem polinoamele în paranteză ci adunăm succesiv la primul polinom fiecare termen al celui de al doilea.

Pentru uşurarea calculelor polinoamele se scriu unele sub altele astfel încît termenii asemenea să fie scrişi unul sub altul.

3) $\qquad P(x) = -5x^3 + 7x - 6x^2 + 8;$

$\qquad Q(x) = 7x^3 - 5x^2 + 8x - 9;$

$\qquad R(x) = -15x^3 + 3x^2 - 7x + 1.$

Ordonăm polinoamele şi le scriem unele sub altele:

$$\begin{array}{r} P(x) = -5x^3 - 6x^2 + 7x + 8, \\ Q(x) = 7x^3 - 5x^2 + 8x - 9, \\ R(x) = -15x^3 + 3x^2 - 7x + 1. \\ \hline P(x) + Q(x) + R(x) = -13x^3 - 8x^2 + 8x. \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{r} P(a,b) = 3a^3b^2 - 4a^4b^3 + 5a^5b^4 + b^6, \\ Q(a,b) = 8a^3b^2 + 6a^4b^3 + 2a^5b^4 + b^6, \\ R(a,b) = -11a^3b^2 + 3a^4b^3 - 5a^5b^4 - 2b^6. \\ \hline P(a,b) + Q(a,b) + R(a,b) = 5a^4b^3 + 2a^5b^4. \end{array}$$

Scăderea polinoamelor. A scădea un polinom Q dintr-un polinom P, înseamnă să adunăm la P pe rînd toţi termenii polinomului Q luaţi cu semnul schimbat (diferenţa a două sume).

Exemple.

1)

$$\begin{array}{r} P(a,b) = 5a^3b^2 - 7ab^2 + 8a^2b - 5a + 3b, \\ Q(a,b) = 2a^3b^2 + 7ab^2 + 8a^2b + 5a - 3b, \\ \hline P(a,b) - Q(a,b) = 5a^3b^2 - 7ab^2 + 8a^2b - 5a + 3b - \\ - 2a^3b^2 - 7ab^2 - 8a^2b - 5a + 3b. \end{array}$$

$$P(a,b) - Q(a,b) = 3a^3b^2 - 14ab^2 - 10a + 6b.$$

2)

$$\begin{array}{r} P(x,y) = -7x^2y + 8xy^2 - 9y^3 + 7x^2 - 9y^2 + xy, \\ Q(x,y) = -7x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 3y^3, \\ \hline P(x,y) - Q(x,y) = -7x^2y + 8xy^2 - 9y^3 + 7x^2 - 9y^2 + xy + \\ + 7x^3 - 9x^2y + 8xy^2 - 3y^3 \end{array}$$

$$P(x,y) - Q(x,y) = 7x^3 - 16x^2y + 16xy^2 - 12y^3 + 7x^2 - 9y^2 + xy.$$

Înmulţirea monoamelor. Produsul a două monoame este tot un monom avînd coeficientul egal cu produsul coeficienţilor iar partea literală, produsul părţilor literale.

Exemplu. $E = (-5a^2bc) \cdot (-4ab^4c^2)$.

$E = -5 \cdot a^2 \cdot b \cdot c \cdot (-4)ab^4c^2$. Aplicăm comutativitatea şi asociativitatea operaţiei de înmulţire.

$$E = 20\ (a^2 \cdot a) \cdot (b \cdot b^4) \cdot (c \cdot c^2).$$

$$E = 20\ a^3b^5c^3.$$

În mod analog se efectuează produsul mai multor monoame:

$$(-3a^2bc) \cdot (2ab^2c)\ (-ab) = -3 \cdot 2(-1) \cdot a^2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b^2 \cdot b \cdot c \cdot c = 6\ a^4b^4c^2.$$

Înmulţirea polinoamelor. A înmulţi un polinom P cu un polinom Q înseamnă a face produsul a două sume algebrice. Produsul va fi deci un polinom $R = P \cdot Q$ ai cărui termeni se obţin înmulţind fiecare termen al unui polinom cu toţi termenii celuilalt polinom:

$$(a + b + c) \cdot (d + e) = ad + bd + cd + ae + be + ce.$$

Exemple.

1) $(3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 6x + 2) \cdot (2x^2 - x + 3) = 6x^6 + 8x^5 - 4x^4 + 12x^3 +$
$+ 4x^2 - 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 9x^4 + 12x^3 - 6x^2 +$
$+ 18x + 6 = 6x^6 + 5x^5 + x^4 + 26x^3 - 8x^2 + 16x + 6.$

Pentru uşurarea calculelor produsele parţiale se aşază unele sub altele astfel încît termenii asemenea să fie aşezaţi în aceeaşi coloană.

2) $(5x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 4)\ (x^2 - 2x - 1) =$ (S-au lăsat spaţii pentru termenii care lipsesc)

$$\begin{array}{l} 5x^7 - 3x^5 + 2x^4 \qquad + 4x^2 \\ \quad - 10x^6 + 6x^4 - 4x^3 \qquad - 8x \\ \qquad\quad - 5x^5 \quad + 3x^3 - 2x^2 - 4 \\ \hline 5x^7 - 10x^6 - 8x^5 + 8x^4 - x^3 + 2x^2 - 8x - 4. \end{array}$$

3) $(4a^4b^2 - 5a^3b^3 - a^2b^4 + ab)\ (2a^2b - 3ab^2 + b^3) =$

$$\begin{array}{l} 8a^6b^3 - 10a^5b^4 - 2a^4b^5 + 2a^3b^6 \\ \quad - 12a^5b^4 + 15a^4b^5 + 3a^3b^2 - 3a^2b^7 \\ \qquad\qquad + 4a^4b^5 - 5a^3b^6 - a^2b^7 + ab^8 \\ \hline 8a^6b^3 - 22a^5b^4 + 17a^4b^5 \qquad - 4a^2b^7 + ab^8. \end{array}$$

Observări. 1) Dacă cele două polinoame sînt omogene de gradul m respectiv n, produsul lor va fi tot un polinom omogen; fiecare termen al polinomului produs este de gradul $m + n$.

2) Pentru uşurarea calculelor este bine ca înainte de a efectua înmulţirea polinoamelor să le ordonăm după puterile aceleiaşi litere.

$(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \cdot (a - b) = a^5 - b^5.$ Polinoamele sînt omogene şi ordonate.

$$\begin{array}{l} a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 \\ \quad - a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 \\ \hline a^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - b^5 \end{array}$$

Produsele parţiale sînt omogene ordonate.

Produsul este polinom omogen şi ordonat.

4. Înmulţirea polinoamelor are aceleaşi proprietăţi ca şi înmulţirea numerelor întregi căci polinomul poate fi privit ca un număr.

5. $P \cdot 0 = 0.$ Orice polinom înmulţit cu 0 este 0.
$P \cdot 1 = P.$ 1 este element neutru pentru înmulţirea polinoamelor.

Ridicarea unui monom la o putere. Regulă. Pentru a ridica un monom la o putere cu exponent număr natural ridicăm fiecare factor la această putere.

$$(-5a^3b^2)^3 = (-5)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b^2)^3 = -125a^9b^6.$$

În adevăr,

$$(-5a^3b^2)^3 = (-5a^3b^2)\ (-5a^3b^2) \cdot (-5a^3b^2).$$

Pentru a efectua înmulţirea a două sau mai multe produse suprimăm parantezele

$$(-5a^3b^2)^3 = (-5)a^3b^2(-5)a^3b^2(-5)a^3b^2.$$

Aplicînd comutativitatea și asociativitatea

$$(-5a^3b^2)^3 = (-5)^3(a^3)^3 \cdot (b^2)^3,$$
$$(-5a^3b^2)^3 = -125a^9b^6.$$

Exemple.

1) $$(3abx^2)^4 = 3^4a^4b^4x^8 = 81a^4b^4x^8.$$

2) $$(-a^2b^3x)^3 = -a^6b^9x^3.$$

Identități

Aplicînd regulile de calcul stabilite se obțin unele identități des folosite.

1) *Produsul de sumă prin diferență a două monoame sau polinoame este egal cu diferența pătratelor lor.*

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$ căci $(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$.

Aplicații.

$$(3a^2b^3 - 4a^3b^2)(3a^2b^3 + 4a^3b^2) = 9a^4b^6 - 16a^6b^4.$$
$$[(m+n) - p][(m+n) + p] = (m+n)^2 - p^2 = m^2 + 2mn + n^2 - p^2.$$
$$\left(\frac{1}{2}x^4y^2 + \frac{2}{5}xy\right)\left(\frac{1}{2}x^4y^2 - \frac{2}{5}xy\right) = \frac{1}{4}x^8y^4 - \frac{4}{25}x^2y^2.$$

2) *Pătratul unui binom este egal cu pătratul primului termen, plus de două ori primul termen înmulțit cu al doilea, plus pătratul celui de-al doilea termen.*

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

În adevăr,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Aplicații.

1) $(a-b)^2 = [a + (-b)]^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

2) $(3a^2b + 5ab^2)^2 = (3a^2b)^2 + 2 \cdot 3a^2b \cdot 5ab^2 + (5ab^2)^2 = 9a^4b^2 + 30a^3b^3 + 25a^2b^4.$

3) $$\left(\frac{2}{5}x^3 - \frac{5}{4}y^2\right)^2 = \frac{4}{25}x^6 - x^3y^2 + \frac{25}{16}y^4.$$

3) *Produsul a două binoame care diferă numai prin al doilea termen* $(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc.$

Aplicație.

$$(2a - 3b)(2a + 5b) = (2a)^2 + 2a(-3b + 5b) - 15b^2 = 4a^2 + 4ab - 15b^2.$$

4) *Pătratul unui polinom este egal cu suma pătratelor termenilor săi, la care se adaugă de două ori suma produselor termenilor luați cîte doi.*

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

În adevăr,

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + c^2 + 2(a + b)c = a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + 2ac + 2bc$$

Aplicații.

1) $(2x - y + 3z)^2 = 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 12xz - 6yz$

2) $(a^2 - a + 1)^2 = a^4 + a^2 + 1 - 2a^3 + 2a^2 - 2a$

5) *Cubul unui binom* este egal cu primul termen la cub, plus de trei ori pătratul primului termen înmulțit cu al doilea termen, plus de trei ori primul termen înmulțit cu al doilea termen la pătrat plus al doilea termen la cub

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

În adevăr $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + b^2 + 2ab)\ (a + b) = a^3 + ab^2 + 2a^2b + a^2b + b^3 + 2ab^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Aplicații.

1) $(a - b)^3 = [a + (- b)]^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

2) $(2a + 3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2 \cdot 3b + 3\ (2a)\ (3b)^2 + (3b)^3 = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$.

3) $(a^3 - 2b^2)^3 = a^9 + 3a^6\ (- 2b^2) + 3a^3(- 2b^2)^2 + (- 2b^2)^3 = a^9 - 6a^6\ b^2 + 12a^3b^4 - 8b^6$.

6) Din efectuarea înmulțirii $(a^2 + ab + b^2)$ cu $(a - b)$ obținem

$$(a^2 + ab + b^2)\ (a - b) = a^3 - b^3.$$

Aplicație. $(4x^2 + 2x + 1)\ (2x - 1) = (2x)^3 - 1^3 = 8x^3 - 1$.

7) De asemenea prin efectuarea produsului $(a^2 - ab + b^2)$ cu $(a + b)$ obținem

$$(a^2 - ab + b^2)\ (a + b) = a^3 + b^3$$

Aplicații. 1) $(a^2 + 5a + 25)\ (a - 5) = a^3 - 125$.

2) $(x^4 - x^2y^2 + y^4)\ (x^2 + y^2) = x^6 + y^6$.

Împărțirea monoamelor.

Regulă. Cîtul a două monoame se obține împărțind coeficienții între ei și părțile literale între ele.

În adevăr, a împărţi un produs cu un alt produs înseamnă a împărţi succesiv primul produs cu toţi factorii produsului al doilea.

Exemplu. $A = (24a^4b^5c^3) : (4a^2bc^2) = 6a^2b^4c$.

Dar pentru a împărţi un produs cu un număr este suficient să împărţim un factor cu acest număr; în cazul nostru

$A = (24 : 4) \cdot (a^4 : a^2) \cdot (b^5 : b) \cdot (c^3 : c^2)$. Efectuăm parantezele.
$A = 6 \cdot a^2 \cdot b^4 c$.

2) $(100x^3y^2z) : (-25x^2y) = [100 : (-25)] \cdot (x^3 : x^2) \cdot (y^2 : y) z = -4xyz$,

3) $(-27x^5y^3z^4) : (4x^5z^3) = -\frac{27}{4} x^0y^3z = -\frac{27}{4} y^3z$.

Observări. 1) În exemplele de împărţire a două monoame pe care le-am luat, gradul fiecărei litere a fost mai mare la deîmpărţit decît la împărţitor $[a^m : a^n = a^{m-n}$; $m \geqslant n]$ şi cîtul a fost un monom întreg. Dacă $m < n$, $a^m : a^n$ se scrie $\frac{a^m}{a^n}$.

2) Cîtul a două monoame poate fi scris ca şi la numere sub formă de fracţie algebrică:

$$\frac{3a^2b}{5x}, \frac{7x^2y}{2a}, \frac{35bx^3y^3}{70a^2xy^3}.$$

3) La operaţiile de împărţire a monoamelor este necesar să se închidă împărţitorul în paranteze, altfel se efectuează alte operaţii.

De exemplu: $(15 \cdot 18) : (5 \cdot 3) = 15 \cdot 18 : 5 : 3 = 18$.
$(15 \cdot 18) : 5 \cdot 3 = 15 : 5 \cdot 18 \cdot 3 =$
$= 3 \cdot 18 \cdot 3 = 162$.
$a^3b^2 : (a^2b) = a \cdot b, \quad a^3b^2 : a^2b = ab^3$.

c. *Împărţirea unui polinom cu un monom*

Pentru a împărţi un polinom cu un monom, împărţim fiecare termen al polinomului cu monomul dat.

Exemple:

1) $(20a^4b + 15a^3b^2 - 10a^2b^3 + 15ab^4) : (5ab) = \frac{20a^4b}{5ab} + \frac{15a^3b^2}{5ab} - \frac{10a^2b^3}{5ab} + \frac{15ab^4}{5ab} = 4a^3 + 3a^2b - 2ab^2 + 3b^3$.

2) $(21x^4 + 40x^3 - 20x^2 + 6x - 12) : (-6x) = -\frac{7}{2}x^3 - \frac{20}{3}x^2 + \frac{10}{3}x - 1 + \frac{2}{x}$.

IV.

Divizibilitatea numerelor și polinoamelor

Fiind date două numere întregi sau două polinoame, A și B, în cazul cînd împărțirea $A : B$ se face exact vom spune că B divide pe A sau că A este divizibil cu B (scriem $A \vdots B$). Mai spunem că A este multiplu al lui B sau că B este un divizor al lui A.

Cînd A nu se divide cu B vom scrie $A \not\vdots B$.

Divizibilitatea numerelor întregi se reduce la divizibilitatea numerelor naturale. În cele ce urmează vom prezenta cîteva criterii de divizibilitate a numerelor naturale.

La baza acestor criterii stau următoarele propoziții: **1.** *Dacă mai multe numere naturale a, b, c sînt divizibile cu un număr p, atunci și suma (diferența) lor este divizibilă cu același număr.*

Dacă $a \vdots p$, $b \vdots p$, $c \vdots p$, înseamnă că a, b, c sînt multiplii de p

$$a = pa_1,\ b = pb_1,\ c = pc_1.$$

$a + b + c = pa_1 + pb_1 + pc_1 = p(a_1 + b_1 + c_1)$; $a + b + c$ este multiplu de p.

Deci $(a + b + c) \vdots p$.

Exemple. $75 \vdots 5$; $15 \vdots 5$; $125 \vdots 5$.

$$(75 + 15 + 125) \vdots 5.$$

În adevăr,

$$5(15 + 3 + 25) : 5 = 15 + 3 + 25 = 43.$$

deci

$$(75 + 15 + 125) \vdots 5.$$

2. *Dacă într-o sumă de doi termeni un termen al sumei și suma sînt divizibile cu același număr, atunci și al doilea termen al sumei este divizibil cu acel număr.*

Dacă $(a + b) \vdots p$ și $a \vdots p$ atunci $b \vdots p$.

Dacă $(a + b) \vdots p$ și $a \vdots p$, atunci și diferența lor este divizibilă cu p deci

$$(a + b - a) \vdots p \text{ sau } b \vdots p.$$

Din proprietățile 1 și 2 rezultă:

O sumă de doi termeni în care un termen este divizibil cu un număr este divizibilă cu acel număr dacă și numai dacă și celălalt termen al sumei este divizibil cu acel număr.

3. *Dacă un număr este divizibil cu alt număr, el este divizibil și cu divizorii acelui număr.*

$$546 \vdots 6,\qquad 546 \vdots 2,\qquad 546 \vdots 3.$$

4. Dacă $a \vdots b$ și $b \vdots c$ (dacă a este divizibil cu un număr b și acesta este divizibil cu alt număr c, atunci $a \vdots c$.

Spunem că divizibilitatea este tranzitivă.

În adevăr, $a \vdots b$ înseamnă că $a = bq$; $b \vdots c$ înseamnă că $b = cr$.

Deci $a = bq = crq$.

$a = crq$ înseamnă că $a \vdots c$.

Exemplu. $442 \vdots 26$ $(442 : 26 = 17)$
și $26 \vdots 13$.
Atunci $442 \vdots 13$. Verificare: $442 : 13 = 34$.

Criteriul de divizibilitate cu 10

Un număr este divizibil cu 10 dacă și numai dacă ultima lui cifră (care reprezintă unități simple) este 0.

În adevăr orice număr care se termină în 0 se împarte exact la 10.

Criteriul de divizibilitate cu 2

Un număr este divizibil cu 2 dacă și numai dacă ultima cifră este 0 sau reprezintă un număr par.

Dacă numărul se termină în 0 este divizibil cu 10 deci și cu 2 (divizor al lui 10).

Dacă numărul nu se termină în 0 poate fi scris ca o sumă în care primul termen este numărul de zeci al numărului, iar al doilea numărul unităților, $N = A \cdot 10 + a_0$ (a_0 cifra unităților).

$A \cdot 10 \vdots 2$, deci $N \vdots 2$ dacă și numai dacă $a_0 \vdots 2$.

Exemple. 1) $\underset{\vdots 2}{2536} = \underset{\vdots 2}{2530} + \underset{\vdots 2}{6}$. $2536 \vdots 2$.

2) $\underset{\not\vdots 2}{2537} = \underset{\vdots 2}{2530} + \underset{\not\vdots 2}{7}$ $2537 \not\vdots 2$.

Criteriul de divizibilitate cu 5

Un număr este divizibil cu 5 dacă și numai dacă ultima cifră este 0 sau 5.

Raționament analog ca în cazul precedent

$N \vdots 10 \Rightarrow N \vdots 5$ (căci $10 \vdots 5$)

$N = A \cdot 10 + a_0$ $10A \vdots 5 \Rightarrow N \vdots 5$ dacă și numai dacă $a_0 \vdots 5$.

Exemple. 1) $\underset{\vdots 5}{1725} = \underset{\vdots 5}{1720} + \underset{\vdots 5}{5}$ $1725 \vdots 5$

2) $\underset{\not\vdots 5}{1727} = \underset{\vdots 5}{1720} + \underset{\not\vdots 5}{7}$ $1727 \not\vdots 5$.

Criteriul de divizibilitate cu 10^n

Un număr este divizibil cu 10^n dacă și numai dacă este terminat în n zerouri.

În adevăr, în acest caz numărul se împarte exact cu 10^n.

Cazuri particulare. 1) $n = 2$. Un număr este divizibil cu 100 dacă și numai dacă se termină cu 2 zerouri. În acest caz numărul este divizibil și cu divizorii lui 100 : cu 4 și 25.

2) $n = 3$. Un număr este divizibil cu 1000 dacă și numai dacă se termină cu 3 zerouri. În acest caz numărul se divide și cu divizorii lui 1000; în particular cu 8 și 125.

Criteriul de divizibilitate cu 4 (sau 25)

Un număr este divizibil cu 4 (cu 25) dacă și numai dacă ultimele două cifre sînt zerouri sau reprezintă un număr divizibil cu 4 (cu 25).

$N = A \cdot 10^2 + a_1 10 + a_0$ (a_0 și a_1 sînt cifrele unităților respectiv zecilor numărului).

$A \cdot 10^2 \vdots 4$. Atunci $N \vdots 4$ dacă și numai dacă $(a_1 10 + a_0) \vdots 4$.

$A \cdot 10^2 \vdots 25$. Atunci $N \vdots 25$ dacă și numai dacă $(a_1 10 + a_0) \vdots 25$.

Exemple. 1) $4332 = 4\,300 + 32$

$\vdots 4$	$\vdots 4$	$\vdots 4$	$4\,332 \vdots 4$,
$\not\vdots 25$	$\vdots 25$	$\not\vdots 25$	$4\,332 \not\vdots 25$.

2) $4\,250 = 4\,200 + 50$

$\not\vdots 4$	$\vdots 4$	$\not\vdots 4$	$4\,250 \not\vdots 4$,
$\vdots 25$	$\vdots 25$	$\vdots 25$	$4\,250 \vdots 25$.

Criteriul de divizibilitate cu 8 (sau 125)

Un număr este divizibil cu 8 (sau 125) dacă și numai dacă ultimele trei cifre ale numărului sînt zerouri sau reprezintă un număr divizibil cu 8 (sau 125).

$N = A \cdot 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ și se aplică proprietatea divizibilității unei sume.

Exemple. 1) $25\,125 = 25\,000 + 125$

$\vdots 125$	$\vdots 125$	$\vdots 125$	$25\,125 \vdots 125$.

2) $25\,246 = 25\,000 + 246$

$\not\vdots 8$	$\vdots 8$	$\not\vdots 8$	$25\,246 \not\vdots 8$.

Criteriul de divizibilitate cu 3 (sau 9)

Pentru stabilirea criteriului de divizibilitate cu 3 sau 9 ținem seama că $10^n = k' \cdot 9 + 1$; iar $a \cdot 10^n = k \cdot 9 + a$.

În adevăr

$$10 = 9 + 1$$
$$10^2 = 99 + 1 = a \cdot 9 + 1$$
$$10^3 = 999 + 1 = b \cdot 9 + 1$$
$$\vdots$$
$$10^n = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cifre}} + 1 = k \cdot 9 + 1.$$

Un număr este divizibil cu 3 (sau 9) dacă și numai dacă suma numerelor reprezentate de cifrele lui este un număr divizibil cu 3 (sau 9).

$$4\,521 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 = 4(A \cdot 9 + 1) + 5(B \cdot 9 + 1) + 2(C \cdot 9 + 1) + 1.$$

Desfacem parantezele și aplicăm proprietățile adunării strîngînd toți multiplii de 9 într-o sumă care va fi evident multiplu de 9.

$$4\,521 = M\,9 + \underbrace{(4 + 5 + 2 + 1)}$$ Aplicăm proprietatea divizibilității unei sume de două numere.

$\vdots 3 \quad \vdots 3$

$\vdots 9 \quad \not\vdots 9$

Deci $4\,521 \vdots 3$ și $4\,521 \not\vdots 9$.

Aplicație. Ce cifre trebuie să punem în locul unităților simple (notate cu u) în numărul $N = (712\,u)$ pentru ca numărul să fie divizibil cu : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 25.

Pentru a fi divizibil cu 2, u poate fi una din cifrele: 0, 2, 4, 6, 8.

Pentru a fi divizibil cu 3 suma $7 + 1 + 2 + u = 10 + u$ trebuie să fie divizibilă cu 3; deci u poate fi 2, $(12 \vdots 3)$; 5, $(15 \vdots 3)$ sau 8, $(18 \vdots 3)$.

Pentru a fi divizibil cu 4, numărul $(2u)$ trebuie să fie divizibil cu 4 deci u poate fi 4, $(24 \vdots 4)$ sau 8, $(28 \vdots 4)$ sau

$N \vdots 6$ dacă $N \vdots 3$ și $N \vdots 2$ (N număr par și $N \vdots 3$) deci u poate fi 2 sau 8.

$7\,122 : 6$ și $7\,128 : 6$.

$N \vdots 9$ dacă $(10 + u) \vdots 9$ deci $u = 8$. $N \vdots 25$ dacă $12u \vdots 25$ deci $u = 5$.

Numere prime. Orice număr natural se divide cu 1 și cu el însuși. Acești divizori se numesc *divizori improprii*. Ceilalți divizori ai numărului (dacă există) se numesc *divizori proprii*.

Număr prim se numește numărul care are numai divizori improprii (pe 1 și pe el însuși).

Exemple. 2, 3, 5, 7, 11 ș.a.m.d. Numărul 6 nu e număr prim căci în afară de divizorii improprii 1 și 6 mai are divizorii proprii 2 și 3.

Număr compus sau neprim este numărul care are și divizori proprii.

Exemple. 6, 8, 9, 12, 14, 25 ș.a.m.d.

Regulă. Pentru a stabili dacă un număr este prim sau neprim cercetăm dacă se divide cu toate numerele prime (începînd cu 2) luate în ordine, pînă ajungem la o împărțire în care cîtul este mai mic decît împărțitorul. Dacă împărțirile au fost toate împărțiri cu rest, numărul este număr prim.

Pentru numerele prime mai mici ca 100 putem folosi un tabel în care scriem toate numerele naturale începînd cu 2 pînă la 100. Tăiem apoi din tabel numerele din 2 în 2 începînd cu 4 (toți multiplii de 2), din 3 în trei începînd cu 9 (toți multiplii de 3), apoi multiplii de 5 de 7. În tabel rămîn netăiate următoarele numere care sînt numere prime.

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97.

Exemplu. Numărul 401 este număr prim.

$401 \not\vdots 2$; $401 \not\vdots 3$; $401 \not\vdots 5$; $\begin{array}{r|l} 401 & 7 \\ \hline 2 & 57 \end{array}$;

$\begin{array}{r|l} 401 & 11 \\ \hline 71 & 36 \\ 5 & \end{array}$; $\begin{array}{r|l} 401 & 13 \\ \hline 11 & 30 \end{array}$; $\begin{array}{r|l} 401 & 17 \\ \hline 61 & 23 \\ 10 & \end{array}$; $\begin{array}{r|l} 401 & 19 \\ \hline 21 & 20 \end{array}$.

Ar trebui să încercăm mai departe cu 23, dar nu mai continuăm încercările deoarece cîtul împărțirii cu 19 este 20, cîtul împărțirii cu 23 ar fi mai mic decît 20.

Dacă un număr natural (diferit de 1) nu este număr prim, el admite cel puțin un divizor propriu, număr prim.

Orice număr compus poate fi scris în mod unic sub forma unui produs de numere prime.

În acest caz spunem că am descompus numărul în factori primi. Pentru a descompune un număr în factori primi procedăm astfel:

Împărțim numărul la cel mai mic divizor propriu; cîtul obținut, la cel mai mic divizor propriu al lui ş.a.m.d.

Exemple. 1) $N = 1735.$

$1735 \not\vdots\, 2$; $1735 \not\vdots\, 3$. $1735 \vdots\, 5$ deci 5 este cel mai mic divizor propriu $N = 347 \cdot 5$.

$347 \not\vdots\, 5$; $347 \not\vdots\, 7$; $347 \not\vdots\, 11$; $347 \not\vdots\, 13$; $347 \not\vdots\, 17$; $347 \not\vdots\, 19$; $\begin{array}{r|l} 347 & 19 \\ \hline 157 & 18 \\ \hline 5 & \end{array}$.

Deci 347 este număr prim; $N = 5 \cdot 347.$

2) $N = 5655.$

$5655 \not\vdots\, 2$; $5655 \vdots\, 3$; $N = 3 \cdot 1885$; $1885 \vdots\, 5$; $1885 = 5 \cdot 377.$

$N = 3 \cdot 5 \cdot 377$; $377 \not\vdots\, 7$; $377 \not\vdots\, 11$; $377 \vdots\, 13$; $377 = 13 \cdot 29.$

$$N = 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29.$$

Pentru uşurarea scrisului, în cazul numerelor mari, se scriu toți divizorii primi ai numărului la dreapta unei linii verticale iar la stînga cîturile împărțirii prin acești factori.

Exemple. 1) $N = 17325.$

$$\begin{array}{r|l} 17325 & 3 \\ 5775 & 3 \\ 1925 & 5 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$N = 17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

2) $N = 2259000.$

Dar $N = 2259 \cdot 1000 = 2259 \cdot 2^3 \cdot 5^3$. Descompunem 2259

$$\begin{array}{r|l} 2259 & 3 \\ 753 & 3 \\ 251 & 251 \\ 1 & \end{array};\quad \begin{array}{r|l} 251 & 7 \\ \hline 41 & 35 \\ \hline 6 & \end{array};\quad \begin{array}{r|l} 251 & 11 \\ \hline 31 & 22 \\ \hline 9 & \end{array};\quad \begin{array}{r|l} 251 & 13 \\ \hline 121 & 19 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 251 & 17 \\ \hline 81 & 14 \\ \hline 13 & \end{array};\quad \begin{array}{r|l} 251 & 19 \\ \hline 61 & 13 \\ \hline 4 & \end{array}$$ 251 este număr prim.

$$N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 251.$$

3) $N = 72560000.$

72560000	$2^4 \cdot 5^4$
7256	2^2
1814	2
907	907

$907 : 7 = 129$, rest 4 (907 − 20 − 67 − 4); $907 : 11 = 82$, rest 5 (27); $907 : 13 = 69$, rest 10 (127);

$907 : 17 = 53$, rest 6 (57); $907 : 19 = 47$, rest 14 (147); $907 : 23 = 39$, rest 10 (217);

$907 : 29 = 31$, rest 8 (37), $907 \not\vdots 31$,

907 este număr prim.

$$N = 2^7 \cdot 5^4 \cdot 907$$

A este divizibil cu *B* dacă toți factorii primi ai împărțitorului se găsesc printre factorii deîmpărțitului cu exponenți cel puțin egali.

Exemple. 1) $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $B = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

$A \vdots B$ pentru că toți factorii lui *B* se găsesc printre factorii lui *A* la puteri cel puțin egale, 2 și 3 la puteri mai mari, 7 la aceeași putere.

2) $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $B = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$.

$A \not\vdots B$ pentru că 3 se găsește la deîmpărțit la o putere mai mică.

3) $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $B = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$.

$A \not\vdots B$ pentru că factorul 11 nu este factor al numărului *A*.

Înmulțirea și împărțirea numerelor descompuse în factori primi se fac pe baza regulilor acestor operații cu produse și puteri de numere.

Exemplu. $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $B = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

$A : B = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) : (2^2 \cdot 3 \cdot 7)$. Împărțim primul produs cu fiecare factor al celui de-al doilea.

$$A : B = (2^3 : 2^2) \cdot (3^2 : 3) \cdot 5(7 : 7); \quad A : B = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

$A \cdot B = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 7)$. Desfacem parantezele, aplicăm comutativitatea și asociativitatea

$$A \cdot B = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7; \quad A : B = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Divizorii unui număr se pot stabili cercetînd care sînt numerele mai mici decît numărul dat care divid acest număr.

De exemplu: 12 are divizorii 1,2,3,4,6,12;

15 are divizorii 1,3,5,15;

$2^3 \cdot 3$ are divizorii $1, 2, 2^2, 2^3, 3, 6, 12, 24$.

Divizor comun a două sau mai multe numere este numărul care divide toate numerele date. Dacă A este mulţimea divizorilor numărului N şi B mulţimea divizorilor numărului M atunci mulţimea C a divizorilor comuni este $A \cap B$.

Exemple.

1) $24 \vdots 1,2,3,4,6,8,12,24,$

$40 \vdots 1,2,4,5,8,10,20,40.$

$\{1,2,3,4,6,8,12,24\} \cap \{1,2,4,5,8,10,20,40\} = \{1,2,4,8\}.$

Divizorii comuni ai numerelor 24 şi 40 sînt: 1,2,4,8.

2) $18 \vdots 1,2,3,6,9,18,$

$27 \vdots 1,3,9,27.$

$\{1,2,3,6,9,18\} \cap \{1,3,9,27\} = \{1,3,9\}.$

Divizori comuni sînt: 1,3,9.

3) $18 \vdots 1,2,3,6,9,18,$

$35 \vdots 1,5,7,35.$

$\{1,2,3,6,9,18\} \cap \{1,5,7,35\} = \{1\}.$

18 şi 35 au ca divizor comun numai pe 1. Numerele care admit ca divizor comun numai pe 1 se numesc numere prime între ele.

Dacă două numere nu sînt prime între ele atunci admit doi sau mai mulţi divizori comuni, cel mai mare dintre aceşti divizori se numeşte cel mai mare divizor comun.

Regulă. Cel mai mare divizor comun a două numere se află astfel:

se descompun numerele în factori primi şi se face produsul factorilor primi comuni luaţi cu exponenţii cei mai mici.

Dacă unul din numere este divizorul celuilalt, acesta este cel mai mare divizor comun.

Exemple. 1)

$$48 = 2^4 \cdot 3$$
$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$\text{c.m.m.d.c.} = 2^2 \cdot 3$$

2)

$$125 = 5^3$$
$$75 = 3 \cdot 5^2$$
$$\text{c.m.m.d.c.} = 5^2.$$

3)

$$125 = 5^3$$
$$81 = 3^4$$
$$\text{c.m.m.d.c.} = 1.$$

Numerele sînt prime între ele.

4)

$81 = 3^4$

$27 = 3^3$. C.m.m.d.c. este 27 căci $81 \vdots 27$.

Cel mai mare divizor comun al mai multor numere este produsul factorilor primi comuni cu exponenţii cei mai mici.

Dacă numerele sînt prime între ele c.m.m.d.c. = 1.

Exemple. 1)

$$125 = 5^3$$
$$500 = 2^2 \cdot 5^3$$
$$1275 = 3 \cdot 5^2 \cdot 17$$

c.m.m.d.c. $= 5^2$.

2)

$$162 = 2 \cdot 3^4$$
$$54 = 2 \cdot 3^3.$$
$$270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$$
$$1275 = 3 \cdot 5^2 \cdot 17$$

c.m.m.d.c. $= 3$.

Multipli comuni

Multiplii unui număr se află înmulţind acel număr cu orice număr întreg.

De exemplu, multiplii lui 7 sînt: 14; 21; 28; 35; 42; 56; 63; 70; 77....

Numărul multiplilor unui număr este nesfîrşit. Două sau mai multe numere au totdeauna multiplii comuni (Numere care se divid cu numerele date.)

Exemple.

Multiplii lui 125: 125, 250, **375**, 500, 625, **750**, 875...

Multiplii lui 75: 75, 150, 225, 300, **375**, 450, 525, 600, 675, **750**,...

Numerele 375, 750 sînt multiplii comuni ai celor două numere.

Numerele 125 şi 75 mai au şi alţi multiplii comuni ca de exemplu $1125 = 3 \cdot 375$, $1500 = 4 \cdot 375$ ş.a.m.d.

Cel mai mic dintre multiplii comuni se numeşte cel mai mic multiplu comun. În cazul nostru c.m.m.m.c. este **375**.

Regulă. Cel mai mic multiplu comun a două numere se află astfel: descompunem numerele în factori primi şi facem produsul factorilor comuni şi necomuni luaţi o singură dată la exponenţii cei mai mari.

Dacă un număr se divide cu celălalt, el este c.m.m.m.c.

Exemple. 1) 1 250 şi 125.

1 250 ⋮ 125 c.m.m.m.c. = 1 250

2)

$$1\,250 = 2 \cdot 5^4$$
$$3\,275 = 5^2 \cdot 131$$
$$75 = 3 \cdot 5^2$$

$$\begin{array}{r|l} 3\,275 & 5 \\ 655 & 5 \\ 131 & 131 \end{array}$$

c.m.m.m.c $= 2 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 131$.

Observări. 1) Din felul cum se calculează c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. rezultă că produsul a două numere este egal cu produsul dintre c.m.m.m.c. şi c.m.m.d.c. al lor.

Exemplu.

$$A = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$
$$B = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$\text{c.m.m.m.c} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\text{c.m.m.d.c} = 2^2 \cdot 3$$

$$A \cdot B = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \quad \text{și}$$
$$(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 3) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7.$$

2) Cel mai mare divizor comun a două numere se poate stabili pe baza algoritmului (regula) lui Euclid care se bazează pe următoarea proprietate.

Dacă două numere se divid cu un număr, atunci și restul împărțirii celor două numere se divide cu acel număr.

Dacă $a = b \cdot q + r$; $a \vdots d$ și $b \vdots d$ atunci, $r \vdots d$.

Proprietatea se deduce imediat din proprietatea divizibilității unei sume. Suma (a) și un termen al ei (bq) sînt divizibile cu numărul d deci și celălalt termen al sumei (r) este divizibil cu numărul d.

Practic pentru a afla c.m.m.d.c. a două numere, de exemplu 2 725 și 325, efectuăm împărțirea $\begin{array}{r|l} 2725 & 325 \\ \hline 125 & 8 \end{array}$

c.m.m.d.c. al celor două numere va fi c.m.m.d.c. al numerelor 325 și 125.

Efectuăm împărțirea $\begin{array}{r|l} 325 & 125 \\ \hline 75 & 2 \end{array}$.

C.m.m.d.c. al numerelor 2 725 și 325 este c.m.m.d.c. al numerelor 125 și 75.

Efectuăm împărțirea $\begin{array}{r|l} 125 & 75 \\ \hline 50 & 1 \end{array}$.

C.m.m.d.c. va fi c.m.m.d.c. al numerelor 75 și 50.

Efectuăm împărțirea $\begin{array}{r|l} 75 & 50 \\ \hline 25 & 1 \end{array}$.

C.m.m.d.c. va fi c.m.m.d.c. al numerelor 50 și 25.
C.m.m.d.c. al numerelor 50 și 25 este 25. $50 \vdots 25$.
Deci c.m.m.d.c. al numerelor 2725 și 325 este 25.

Dacă numerele sînt prime între ele vom găsi un rest egal cu 1 care va deveni ultimul împărțitor deci c.m.m.d.c. = 1.

Aplicații

1) *Un număr este divizibil cu 8 dacă și numai dacă cifra unităților adunată cu dublul cifrei zecilor și cu de patru ori cifra sutelor dă o sumă divizibilă cu 8.*

Numărul N cu oricîte cifre, se poate scrie sub forma

$N = A10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ unde a_2, a_1, a_0 sînt respectiv cifrele sutelor, zecilor, unităților și A un număr natural oarecare.

Căutăm să descompunem numărul într-o sumă de doi termeni din care unul din termeni să fie suma dată în problemă:

$$(a_0 + 2a_1 + 4a_2).$$

$$N = A \cdot 10^3 + 96a_2 + 4a_2 + 8a_1 + 2a_1 + a_0.$$

Dăm pe 8 factor comun parţial:

$$N = 8\,(125A + 12a_2 + a_1) + (4a_2 + 2a_1 + a_0).$$

Primul termen al sumei este divizibil cu 8; numărul N este divizibil cu 8 dacă şi numai dacă şi al doilea termen al sumei este divizibil cu 8 deci:

$$(4a_2 + 2a_1 + a_0) \vdots 8$$

2) *Dacă într-un număr de şase cifre* $N = a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ *avem relaţiile: cifra unităţilor* (a_0) *este egală cu cifra miilor* (a_3); *cifra zecilor* (a_1) *egală cu cifra zecilor de mii* (a_4); *cifra sutelor* (a_2) *egală cu cifra sutelor de mii* (a_5), *atunci numărul este divizibil cu* 7, 11, 13, 1001.

În condiţiile date numărul N se scrie:

$$N = a_2 10^5 + a_1 10^4 + a_0 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

Dînd factori comuni între termenii care conţin ca factor pe a_0, a_1, a_2 $N = 10^2 a_2(10^3 + 1) + 10a_1(10^3 + 1) + a_0(10^3 + 1)$ deci

$$N = (10^3 + 1)\,(10^2 a_2 + 10a_1 + a_0).$$

$10^2 a_2 + 10a_1 + a_0$ este un număr natural n deci

$$N \vdots (10^3 + 1), \qquad N \vdots 1001.$$

N fiind divizibil cu 1001 este divizibil şi cu divizorii lui: 7, 11, 13.

Descompunerea polinoamelor în factori

Metoda factorului comun

Această metodă se aplică atunci cînd fiecare termen al polinomului conţine ca factor o expresie oarecare. Acest factor este cel mai mare divizor comun al termenilor polinomului, el poate fi un număr, un monom sau un polinom.

1) $3x + 3y = 3(x + y)$; $ab + ac = a(b + c)$; $3xy - 3yz = 3y(x - z)$.

2) $20a^4b^5c - 35a^3b^6c^2 + 40a^2b^7c^2 + 5a^2b^5c = 5a^2b^5c\;(4a^2 - 7abc + 8b^2c + 1)$.

3) $a(x - y) - b(x - y) = (x - y)\,(a - b)$.

4) $a^2(x - 1) - b(1 - x) = a^2(x - 1) + b(x - 1) = (x - 1)\;(a^2 + b)$.

Pentru a scoate în evidenţă factorul $(x - 1)$ în al doilea termen al sumei am schimbat semnul din faţa parantezei.

5) $x(a - b) + y(b - a) + z(a - b) = x(a - b) - y(a - b) + z(a - b) = (a - b)\,(x - y + z)$.

6) $2a(x + y - z) - 3b(x + y - z) - 5c(x + y - z) = (x + y - z)\;(2a - 3b - 5c)$.

Descompunerea în factori pe baza identităţilor cunoscute.

a) Identitatea $(a + b)\;(a - b) = a^2 - b^2$ ne conduce la descompunerea unei diferenţe de pătrate în produsul sumei prin diferenţa a două expresii:

1) $x^2 - 9 = (x + 3)\;(x - 3)$; $36a^2 - 100 = (6a - 10)(6a + 10)$.

2) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{25}b^2 = \left(\frac{2}{3}a + \frac{4}{5}b\right)\left(\frac{2}{3}a - \frac{4}{5}b\right)$.

3) $(1 - 0{,}01a^2) = (1 + 0{,}1a)\ (1 - 0{,}1a)$.

4) $(2a - b)^2 - c^2 = [(2a - b) + c]\ [(2a-b)-c] = (2a - b + c)\ \ (2a - b - c)$.

5) $(x + 1)^2 - (y - z)^2 = (x + 1 + y - z)\ \ (x + 1 - y + z)$.

6) $\frac{4}{9}(x + y)^2 - 25 = \left[\frac{2}{3}(x + y) - 5\right]\left[\frac{2}{3}(x + y) + 5\right]$.

b) Identitățile $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ ne conduc la restrîngerea unui pătrat.

1) $a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$; $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$.

2) $25x^4 + 10x^2y^2 + y^4 = (5x^2 + y^2)^2$.

3) $-6x - x^2 - 9 = -(x^2 + 6x + 9) = -(x + 3)^2$.

4) $x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y = (x + y - 1)^2$; $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2 - y + 1 = (x - y + 1)^2$.

c) Identitatea $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ folosește la restrîngerea unui cub $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$.

1) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = (x + 2y)^3$.

2) $z^3 - 6z^2t + 12zt^2 - 8t^3 = (z - 2t)^3$.

3) $125a^3 + 75a^2 + 15a + 1 = (5a + 1)^3$.

4) $\frac{27}{64}x^3y^6 + \frac{9}{8}x^2y^4z^2 + xy^2z^4 + \frac{8}{27}z^6 = \left(\frac{3}{4}xy^2 + \frac{2}{3}z^2\right)^3$.

d) Identitățile

$$a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$$

se aplică la descompunerea unei sume sau diferențe de cuburi.

1) $27 + 8a^3 = (3 + 2a)\ (9 - 6a + 4a^2)$.

2) $64 - 27y^3 = (4 - 3y)\ (16 + 12y + 9y^2)$.

3) $(x - 5)^3 - (5 + x)^3 = (x - 5 - 5 - x)\ [(x - 5)^2 + (x - 5)\ (x + 5) + (x + 5)^2]$; $(x - 5)^3 - (5 + x)^3 = -10\ \ (3x^2 + 25)$.

Metoda grupării termenilor constă în asocierea convenabilă a termenilor polinomului astfel încît polinomul să fie scris ca o sumă de produse cu un factor comun și apoi se scoate acest factor comun.

Exemple.

1) $x^3 + 9 + 3x^2 + 3x = (x^3 + 3x^2) + (3x + 9) = x^2(x + 3) + 3(x + 3) = (x^2 + 3).\ (x + 3)$.

2) $ax^2 - bx^2 - bx + ax - a + b = x^2(a - b) + x(a - b) - (a - b) = (x^2 + x - 1)\ (a - b)$.

3) $10ay - 5by + 2ax - bx = 5y(2a - b) + x(2a - b) = (2a - b)\ \ (x + 5y)$.

4) $x^2 - 6x + 5 = x^2 - x - 5x + 5 = x(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 5)\ (x - 1)$.

Pentru a grupa termenii am descompus $- 6x$ într-o sumă de doi termeni $-x - 5x$. Polinomul se putea descompune direct aplicînd identitatea $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$ și căutînd două numere a și b a cărui sumă este 6 și produs 5. Cele două numere sînt 1 și 5 deci

$$x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5).$$

5) $a^2 - b^2 + c^2 - 2ac = a^2 + c^2 - 2ac - b^2 = (a - c)^2 - b^2 =$
$= (a - c - b)\cdot(a - c + b).$

Am grupat termenii care formează un pătrat perfect și am obținut o diferență de două pătrate.

6) $25 - 9a^2 - 16b^2 + 24ab = 25 - (9a^2 + 16b^2 - 24ab) =$
$= 25 - (3a - 4b)^2 = (5 + 3a - 4b)(5 - 3a + 4b).$

7) $x^4 - 4x^2 - 1 - 4x = x^4 - (4x^2 + 1 + 4x) = x^4 - (2x + 1)^2 =$
$= (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x + 1) = (x^2 - 2x - 1)(x + 1)^2.$

$x^2 - 2x - 1$ nu se mai descompune în factori cu coeficienți raționali căci nu există două numere raționale a căror sumă se fie 2 și al căror produs să fie -1.

8) $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2.$

Am pus în evidență un pătrat perfect adăugînd x^2 pentru a menține egalitatea am adăugat și $- x^2$ obținînd o diferență de două pătrate:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x).$$

9) $6x^2y^2 - x^4 - y^4 = 4x^2y^2 - (x^4 + y^4 - 2x^2y^2).$

Am considerat $6x^2y^2 = 2x^2y^2 + 4x^2y^2$ pentru a forma pătratul perfect $-x^4 - y^4 + 2x^2y^2 = -(x^4 + y^4 - 2x^2y^2).$

$$6x^2y^2 - x^4 - y^4 = 4x^2y^2 - (x^2 - y^2)^2 = (2xy - x^2 + y^2)(2xy + x^2 - y^2).$$

10) $x^2y^2 - y^2z^2 + z^2u^2 - u^2x^2 + 4xyzu = (x^2y^2 + z^2u^2 + 2xyzu) - (y^2z^2 + u^2x^2 - 2xyzu).$

Am separat termenii care formează pătrate perfecte considerînd $4xyzu = 2xyzu + 2xyzu$.

$$x^2y^2 - y^2z^2 + z^2u^2 - u^2x^2 + 4xyzu = (xy + zu)^2 - (yz - ux)^2 =$$
$$= (xy + zu + yz - ux)(xy + zu - yz + ux).$$

Observări. Înainte de a da factori comuni parțiali trebuie să ne asigurăm că grupările făcute conduc la scoaterea în evidență a unui factor comun.

De exemplu, dacă în polinomul $P(a,b) = a^2 + 2ab - ac + b^2 - bc$ am face următoarea grupare

$$P(a,b) = a(a + 2b - c) + b(b - c),$$

nu ne-ar folosi la descompunerea în factori căci nu apare nici un factor comun. Primul termen are factorii a și $(a + 2b - c)$ iar al doilea are factorii b și $b - c$. Dacă scriem însă $2ab = ab + ab$ și grupăm în mod convenabil termenii

$P(a,b) = (a^2 + ab - ac) + (ab + b^2 - bc),$

$P(a,b) = a(a + b - c) + b(a + b - c)$. Apare factorul $(a + b - c)$.

$P(a,b) = (a + b - c)(a + b).$

Acelaşi polinom se putea descompune observînd că putem separa un pătrat perfect $a^2 + 2ab + b^2$:

$$P(a,b) = (a^2 + 2ab + b^2) - (ac + bc),$$

$$P(a,b) = (a + b)^2 - c(a + b),$$

$$P(a,b) = (a + b)\ (a + b - c).$$

Pentru descompunerea unui polinom în factori este necesar uneori să aplicăm succesiv mai multe metode: în primul rînd scoatem factorii comuni (dacă există), apoi cercetăm dacă în paranteză putem aplica una din identităţile cunoscute eventual grupînd termenii în mod convenabil sau grupăm termenii pentru a scoate în evidenţă un factor comun.

Exemple.

1) $5a^2 - 5b^2 = 5(a^2 - b^2) = 5(a + b)\ (a - b).$

2) $10a^2 - 20ab + 10b^2 = 10(a^2 - 2ab + b^2) = 10(a - b)^2.$

3) $100x^2 - 4(7x - 2y)^2 = 4[25x^2 - (7x - 2y)^2] = 4[5x + (7x - 2y)] \cdot [5x - (7x - 2y)] = 4(5x + 7x - 2y)\ (5x - 7x + 2y) = 4(12x - 2y) \cdot (- 2x + 2y) = 16(6x - y)\ (y - x).$

4) $c(a + b)^3 - c(a - b)^3 = c[(a + b) - (a - b)]\ [(a + b)^2 + (a + b)\cdot(a - b) + (a - b)^2] = c[a + b - a + b]\ [a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - b^2 + a^2 - 2ab + b^2] = 2bc(3a^2 + b^2).$

5) $5(a + b)^4 - 5(a - b)^4 = 5[(a + b)^2 - (a - b)^2]\ [(a + b)^2 + (a - b)^2] = 5\ (a + b - a + b)\ (a + b + a - b) \cdot 2(a^2 + b^2) = 40ab(a^2 + b^2).$

6) $25a^4b^4 + 25\ a^4b^2c^2 + 25a^4c^2 = 25a^4(b^4 + b^2c^2 + c^2) = 25a^4(b^4 + 2b^2c^2 + c^2 - b^2c^2) = 25a^4[(b^2 + c^2)^2 - b^2c^2] = 25a^4(b^2 + c^2 - bc)\ (b^2 + c^2 + bc).$

7) $5a^2b(1 - a) - 5b(a - 1) + 10ab(1 - a) = 5a^2b(1 - a) + 5b(1 - a) + 10ab(1 - a) = 5b(1 - a)\ [a^2 + 1 + 2a] = 5b(1 - a)\ (a + 1)^2.$

8) $7b(1 - a)^2 - 14bc(1 - a) + 7bc^2 = 7b\ [(1 - a)^2 - 2c(1 - a) + c^2] = 7b(1 - a - c)^2.$

9) $5x^7 + 5x^6 + 5x^4 + 5x^3 = 5x^3(x^4 + x^3 + x + 1) = 5x^3[x^3(x + 1) + (x + 1)] = 5x^3(x + 1)\ (x^3 + 1) = 5x^3(x + 1)\ (x + 1)\ (x^2 - x + 1) = 5x^3(x + 1)^2(x^2 - x + 1).$

10) $5x + 60x^2y - 45x^3 - 20xy^2 = 5x(1 + 12xy - 9x^2 - 4y^2) = 5x[1 - (9x^2 + 4y^2 - 12xy)] = 5x[\ 1 - (3x - 2y)^2\ ] = 5x(1 - 3x + 2y)\ (1 + 3x - 2y).$

11) $54a^2b^3 - 2a^5b^3 = 2a^2b^3(27 - a^3) = 2a^2b^3(3^3 - a^3) = 2a^2b^3\ (3 - a) \cdot (9 + 3a + a^2).$

12) $40b^2x^4 - 5xb^5 = 5xb^2(8x^3 - b^3) = 5xb^2(2x - b)\ (4x^2 + 2bx + b^2).$

13) $250a^4b^4x + 16abx^4 = 2abx(125\ a^3b^3 + 8x^3) = 2abx\ (5ab + 2x)\ (25a^2b^2 - 10abx + 4x^2)$.

14) $a^3 + 3ab^2 - 3a^2b + c^3 - b^3 = (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + c^3 =$
$= (a - b)^3 + c^3 = (a - b + c)\ [(a - b)^2 - (a - b)c + c^2] =$
$= (a - b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - ac + bc)$.

15) $a^3 - b^3 - 3a^2 - 3b^2 + 3a - 3b - 2 = (a^3 - 3a^2 + 3a - 1) -$
$- (b^3 + 3b^2 + 3b + 1) = (a - 1)^3 - (b + 1)^3 =$
$= (a - 1 - b - 1)\cdot[(a - 1)^2 + (b + 1)^2 + (a - 1)\ (b + 1)] =$
$(a - b - 2)\ (a^2 + b^2 + ab - a + b + 1)$.

16) $a^3 - b^3 + 3a^2 - 3b^2 + 3a - 3b = (a^3 - b^3) + 3(a^2 - b^2) + 3(a - b) =$
$= (a - b)\ (a^2 + ab + b^2 + 3a + 3b + 3)$.

Observare. Polinomul se mai putea descompune în factori completînd polinomul $a^3 + 3a^2 + 3a$ pentru a deveni cub perfect: $(a + 1)^3$; adăugăm deci $+ 1$ și $- 1$ și grupăm termenii:

$(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - (b^3 + 3b^2 + 3b + 1) = (a + 1)^3 - (b + 1)^3 =$
$= (a + 1 - b - 1)\ [(a + 1)^2 + (a + 1)\ (b + 1) + (b + 1)^2] =$
$= (a - b)\cdot(a^2 + 2a + 1 + ab + a + b + 1 + b^2 + 2b + 1] =$
$= (a - b)\ (a^2 + ab + b^2 + 3a + 3b + 3)$.

17) $x^6 - y^4 - 4x^3 + 6y^2 - 5 = (x^6 - 4x^3 + 4) - (y^4 - 6y^2 + 9) =$
$= (x^3 - 2)^2 - (y^2 - 3)^2 = (x^3 - 2 + y^2 - 3)\ (x^3 - 2 - y^2 + 3) =$
$= (x^3 + y^2 - 5)\ (x^3 - y^2 + 1)$.

Am separat un pătrat perfect
$x^6 - 4x^3 = (x^6 - 4x^3 + 4) - 4$ adăugînd $+ 4 - 4$.

18) $x^6 - 3x^4 - 4ax^3 + 6ax + 4a^2 = (x^6 - 4ax^3 + 4a^2) + (6ax - 3x^4) =$
$= (x^3 - 2a)^2 + 3x(2a - x^3) = (x^3 - 2a)\ (x^3 - 2a - 3x) =$
$= (x^3 - 2a)\cdot(x^3 - 3x - 2a)$.

Separăm pătratul perfect $x^6 + 4a^2 - 4ax^3$.

19) $x^4 - 5x^3 + 3yx^2 - 10x^2 + 25x - 15y + 25 = (x^4 - 10x^2 + 25) -$
$- 5x^3 + 3yx^2 + 25x - 15y = (x^2 - 5)^2 - 5x(x^2 - 5) + 3y(x^2 - 5) =$
$= (x^2 - 5)\ (x^2 - 5 - 5x + 3y) = (x^2 - 5)\ (x^2 - 5x + 3y - 5)$

Separăm pătratul perfect $x^4 - 10x^2 + 25$.

Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun ale mai multor polinoame

Cel mai mare divizor comun a două sau mai multe polinoame este orice polinom de gradul cel mai mare care divide fiecare din polinoamele date. Pentru găsirea c.m.m.d.c. este necesar să le descompunem în factori și să formăm un produs cu factorii comuni cu exponenții cei mai mici.*

* Dar un polinom se divide întotdeauna cu un număr real, deci există o infinitate de polinoame cu coeficienți proporționali care reprezintă c.m.m.d.c. a două polinoame.

1) $14x - 28y$ și $7x^2 - 28y^2$.

$$14(x - 2y) = 2 \cdot 7(x - 2y),$$

$$7x^2 - 28y^2 = 7(x^2 - 4y^2) = 7(x - 2y)(x + 2y).$$

c.m.m.d.c. $= 7k(x - 2y)$, k fiind orice număr real nenul.

2) $a^2x^2(a^2 - x^2)$; $a^4x - a^3x^2$; $a^2x(a - x)$.

$$a^2x^2(a^2 - x^2) = a^2x^2(a - x)(a + x)$$

$$a^4x - a^3x^2 = a^3x(a - x)$$

$$a^2x(a - x) = a^2x(a - x)$$

c.m.m.d.c. $= ka^2x(a - x)$.

Cel mai mic multiplu comun este un polinom de gradul cel mai mic care se divide la fiecare din polinoamele date.

1) $2x^2 - 4xy + 2y^2$; $6(x^2 - y^2)$; $12x - 12y$.

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x - y)^2$$

$$6(x^2 - y^2) = 2 \cdot 3(x + y)(x - y)$$

$$12x - 12y = 2^2 \cdot 3(x - y).$$

Un polinom care să se dividă cu fiecare dintre polinoamele de mai sus trebuie să conțină ca factori pe $2^2 \cdot 3$, pe $(x + y)$ și pe $(x - y)^2$ deci c.m.m.m.c. al polinoamelor de mai sus va fi de forma $12k(x + y)(x - y)^2$, k fiind orice număr real nenul.

2) $a^2 + 2a + 4$, $a^2 - 4$, $a^3 + 8$.

$$a^2 + 2a + 4 = (a + 2)^2$$

$$a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$$

$$a^3 + 8 = (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$$

c.m.m.m.c. $= k(a + 2)^2(a - 2)(a^2 - 2a + 4)$.

În practică pentru a lucra cu polinoamele cele mai simple considerăm la aflarea c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c $k = 1$.

V
Operații cu numere și cu polinoame

Adunarea

Adunarea numerelor întregi pozitive (inclusiv zero)

1°. Suma a două numere de cîte o cifră se poate stabili cu ajutorul unui tabel în care figurăm șirurile

S_0, S_1...S_9 unde S_a este a, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$..., $a + 9$.

S_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
S_3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
S_5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
S_7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
S_8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
S_9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Suma $(a + b)$ se găsește în tabel la intersecția liniei lui S_a cu coloana corespunzătoare lui b.

De exemplu: $7 + 6 = 13$, 13 se află pe linia S_7 şi pe coloana 6 (la 7 se adaugă unităţi).

$63 + 9 = 12$, 12 este la intersecţia liniei S_3 cu coloana 9 (la 3 se adaugă 9 unităţi).

2° Adunarea numerelor cu mai multe cifre se face folosind scrierea sistematică a numărului ($N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$) şi aplicînd proprietăţile adunării (comutativitatea şi asociativitatea)

$$A = a_n 10^n + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

$$B = b_k 10^k + \dots + b_2 10^2 + b_1 10 + b_0.$$

Considerăm pentru fixarea ideilor $n > k$.

$$A + B = (a_0 + a_1 10 + \dots + a_n 10^n) + (b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \dots + b_k 10^k).$$

Aplicînd comutativitatea şi asociativitatea adunării

$$A + B = a_n 10^n + \dots + a_k 10^k + b_k 10^k + \dots + a_1 10 + b_1 10 + a_0 + b_0.$$

Dar $10^k a_k + 10^k b_k = 10^k \cdot (a_k + b_k)$ (vezi distributivitatea înmulţirii faţă de adunare) deci:

$$A + B = a_n 10^n + \dots + (a_k + b_k) 10^k + \dots + (a_1 + b_1) 10 + (a_0 + b_0).$$

Exemple.

1) $235 + 23 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5 + 2 \cdot 10 + 3.$

Aplicînd comutativitatea

$$235 + 23 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 5 + 3.$$

Aplicînd asociativitatea şi proprietatea de distributivitate

$$235 + 23 = 2 \cdot 100 + (3 + 2) \cdot 10 + (5 + 3)$$

$$235 + 23 = 200 + 50 + 8 = 258.$$

Practic: Pentru a aduna două numere de mai multe cifre adunăm unităţile de acelaşi ordin între ele şi apoi facem suma acestor rezultate.

Pentru uşurarea calculelor numerele se aşază unele sub altele astfel încît unităţile de acelaşi ordin să fie unele sub altele.

Dacă suma unităţilor de un anumit ordin este mai mare decît 9 se transformă ceea ce depăşeşte în unităţi de ordin imediat superior şi se adaugă la suma acestor unităţi. Calculul scris se face începînd cu unităţile de ordinul cel mai mic.

Exemple. 1) $98 + 76 = (90 + 70) + (8 + 6) = 160 + 14 = 100 + 60 + 10 + 4 = 174.$

2)
$$\begin{array}{r} 427 + \\ 243 \\ \hline 670 \end{array}$$

7 unităţi + 3 unităţi = 10 unităţi deci avem 1 zece şi nici o unitate simplă punem cifra 0 la unităţi iar 1 zece o adunăm la zeci: 1 zece + 4 zeci + 2 zeci = 7 zeci

Trecem 7 la zeci

2 sute + 4 sute = 6 sute. Trecem 6 la sute.

În mod analog se procedează cînd avem de adunat mai multe numere

$$S = 8392 + 2036 + 4795$$

$$S = 8\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 9\cdot10 + 2 + 2\cdot10^3 + 3\cdot10 + 6 + 4\cdot10^3 + 7\cdot10^2 + 9\cdot10 + 5$$

$$S = (8 + 2 + 4)\cdot10^3 + (3 + 7)\cdot10^2 + (9 + 3 + 9)\cdot10 + 2 + 6 + 5$$

$$S = 14\cdot10^3 + 10\cdot10^2 + 21\cdot10 + 13$$

Dar 14 mii = 1 zeci de mii + 4 mii; 10 sute = 1 mie; 21 zeci = 2 sute + 1 zece; 13 unități simple = 1 zeci + 3 unități simple

$$S = 1\cdot10^4 + (4 + 1)\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + (1 + 1)\cdot10 + 3 = 15\,223.$$

Scriind numerele unul sub altul astfel ca unitățile de același ordin să fie în aceeași coloană obținem

8392 +	$2u + 6u + 5u = 13u = 1$ zece + 3 *unități*
2036	$1z + 9z + 3z + 9z = 22z = 2$ sute + 2 *zeci*
4795	$2s + 7s + 3s = 12s = 1$ mie + 2 *sute*
15223	1 mie + 4 mii + 2 mii + 8 mii = 15 mii = 1 *zeci de mii* + 5 *mii.*

Scăderea a două numere naturale

1. Scăderea a două numere dacă scăzătorul are o singură cifră se face direct pe baza definiției scăderii (operație inversă a adunării). Pentru a efectua scăderea $a - b$ trebuie găsit numărul c pentru care $b + c = a$.

2. Scăderea a două numere de mai multe cifre se face analog cu adunarea.

$$A = a_n10^n + \ldots + a_210^2 + a_110 + a_0$$

$$B = b_k10^k + \ldots + b_210^2 + b_110 + b_0,\ n \geqslant k$$

$$A - B = a_n10^n + \ldots + (a_k - b_k)10^k + \ldots + (a_2 - b_2)10^2 + (a_1 - b_1)10 + (a_0 - b_0).$$

Dacă scăderile din paranteză nu se pot efectua în mulțimea numerelor naturale adăugăm la descăzut 10 unități obținute prin transformarea unei unități de ordin imediat superior.

Exemple.

1) $7356 - 123 = 7\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 5\cdot10 + 6 - (1\cdot10^2 + 2\cdot10 + 3)$

$7356 - 123 = 7\cdot10^3 + (3 - 1)10^2 + (5 - 2)10 + (6 - 3) = 7233$

2) $2397 - 456 = 2\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 9\cdot10 + 7 - (4\cdot10^2 + 5\cdot10 + 6)$

$2397 - 456 = 2\cdot10^3 + (3 - 4)10^2 + (9 - 5)10 + (7 - 6)$

$3 < 4$; 1 mie = 10 sute; 10 sute + 3 sute = 13 sute

$2397 - 456 = 1\cdot10^3 + (13 - 4)10^2 + (9 - 5)10 + (7 - 6) = 1941$

Practic numerele nu se scriu sub forma sistematică: se scad pe rînd unitățile de același ordin începînd de la dreapta spre stînga (unitățile de ordinul I).

Adunarea și scăderea fracțiilor. Pentru a aduna (scădea) două fracții care nu au același numitor se vor înlocui cu fracții echivalente care au același numitor.

Prin amplificare putem obține totdeauna fracții echivalente cu fracțiile date care să aibă același numitor. Numitorul comun va fi un multiplu comun al numitorilor; îl vom alege pe cel mai mic.

Pentru a aduce mai multe fracții la același numitor amplificăm fiecare fracție cu cîtul dintre numitorul comun găsit (cel mai mic multiplu comun al numitorilor)și numitorul fracției respective.

Exemple. Să se aducă următoarele fracții la același numitor: $\frac{3}{7}, \frac{5}{14}, \frac{2}{21}$. Numitorul comun: $2 \cdot 3 \cdot 7$.

Înlocuim fracțiile date cu fracții echivalente cu numitorul 42. Notăm sus la stînga fiecărei fracții cîtul împărțirii numitorului comun (42) la numitorul respectiv.

$$^{6)}\frac{3}{7} = \frac{18}{42}; \qquad ^{3)}\frac{5}{14} = \frac{15}{42}; \qquad ^{2)}\frac{2}{21} = \frac{4}{42}.$$

Observări 1. Dacă numitorii sînt numere prime între ele numitorul comun va fi produsul numitorilor.

2. Înainte de a aduce fracțiile la același numitor este bine să le simplificăm (dacă e cazul).

Exemple. 1) $S = \frac{11}{270} + \frac{7}{495}$.

$$S = \frac{121}{2970} + \frac{42}{2970} = \frac{163}{2970}$$

$$\begin{array}{l|l} 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 & 11 \\ 495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{c.m.m.m.c.} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11.$$

2) $S = \frac{3}{442} + \frac{6}{494}$ $\qquad S = \frac{3 \cdot 19 + 6 \cdot 17}{8398} = \frac{159}{8398}$

Nu simplificăm fracția $\frac{6}{494}$ căci factorul 2 va figura în numitorul comun

$$\begin{array}{r|l} 442 & 2 \\ 221 & 13 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 494 & 2 \\ 247 & 13 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 442 = 2 \cdot 13 \cdot 17 & 19 \\ 494 = 2 \cdot 13 \cdot 19 & 17 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{c.m.m.m.c.} = 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

Dacă simplificăm fracția $\frac{6}{494}$, obținem același numitor 8398, în acest caz fracția $\frac{3}{247}$ se amplifică cu 34.

3) $S=\frac{5}{750}+\frac{3}{150}$. Ambele fracţii se pot simplifica dar nu este util să simplificăm fracţia $\frac{3}{150}$ căci şi numitorul 750 are factorul 3.

$$S=\frac{1}{150}+\frac{3}{150}=\frac{4}{150}$$

$$S=\frac{4}{150}=\frac{2}{75}$$

4) $A=\frac{12}{175}-\frac{11}{325}$. Aducem la acelaşi numitor

$$A=\frac{156}{2275}-\frac{77}{2275}=\frac{79}{2275}$$

$$\begin{array}{r|l} 175=5^2\cdot 7 & 13 \\ 325=5^2\cdot 13 & 7 \\ \hline \text{c.m.m.m.c.}=5^2\cdot 7\cdot 13 & \end{array}$$

5) $A=\frac{15}{175}-\frac{4}{65}$. Simplificăm prima fracţie (5 intră în 65 la puterea întîi) iar în 175 la puterea a doua).

$A=\frac{3}{35}-\frac{4}{65}$. Aducem la acelaşi numitor.

$$A=\frac{39}{455}-\frac{28}{455}=\frac{11}{455}.$$

6) $S=\frac{3}{17}+\frac{2}{25}+\frac{14}{17}+\frac{3}{25}$.

Aplicăm proprietăţile adunării numerelor fracţionare (comutativitatea şi asociativitatea)

$$S=\frac{3}{17}+\frac{14}{17}+\left(\frac{2}{25}+\frac{3}{25}\right)=1+\frac{5}{25}=1\frac{1}{5}.$$

7) $S=\frac{5}{19}+\frac{4}{35}+\frac{7}{19}+\frac{3}{35}-\frac{7}{35}=\frac{5}{19}+\frac{7}{19}+\left(\frac{4}{35}+\frac{3}{35}-\frac{7}{35}\right)=\frac{12}{19}.$

Pentru a aduna (scădea) două numere mixte aplicăm proprietăţile adunării, comutativitatea şi asociativitatea: adunăm (scădem) părţile întregi între ele şi fracţiile între ele. Dacă fracţia obţinută la adunarea fracţiilor este supraunitară scoatem întregii şi-i adunăm la partea întreagă. Dacă fracţia de la descăzut este mai mică decît fracţia de la scăzător introducem la fracţia descăzut un întreg de la partea întreagă.

Exemple.

1) $15\frac{3}{7}+7\frac{2}{7}=15+7+\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\right)=22\frac{5}{7}.$

2) $7\frac{5}{7}+3\frac{3}{7}=10+\frac{8}{7}=10+1\frac{1}{7}=11\frac{1}{7}.$

3) $7\frac{5}{12}-3\frac{1}{12}=7-3+\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=4\frac{4}{12}=4\frac{1}{3}$.

4) $11\frac{7}{15}-2\frac{4}{15}-9\frac{3}{15}=0\left(11-2-9=0 \quad \frac{7}{15}-\frac{4}{15}-\frac{3}{15}=0\right)$.

5) $12\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=12\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=11\frac{6}{4}-\frac{3}{4}=11\frac{3}{4}$.

6) $256\frac{3}{121}-137\frac{1}{11}=119\frac{3}{121}-\frac{11}{121}=118\frac{124-11}{121}=118\frac{113}{121}$.

Adunarea și scăderea numerelor zecimale

Pentru a aduna (scădea) două numere zecimale adunăm (scădem) cele două numere după regulile stabilite la numerele naturale avînd grijă să adunăm (scădem) numai unități de același ordin.

$S=0{,}5+0{,}32+0{,}253$. La sumă avem 3 miimi; $(5+2=7)$ 7 sutimi; $(2+3+5=10)$ 10 zecimi = 1 unitate simplă.
$S=1{,}073$

În adevăr, $S=\frac{5}{10}+\frac{32}{100}+\frac{253}{1000}$. Numitor comun este 1000.

$$S=\frac{500}{1000}+\frac{320}{1000}+\frac{253}{1000}=\frac{500+320+253}{1000}=\frac{1073}{1000}.$$

Am efectuat o sumă de fracții ordinare cu același numitor, deci suma numerelor zecimale s-a redus la o sumă de numere naturale. Practic numerele se scriu unele sub altele astfeî ca unitățile de același ordin să fie unele sub altele și facem adunarea (scăderea) ca la numerele naturale avînd grijă să punem virgula la rezultat după ce am adunat partea fracționară.

Exemple. 1) $S=127{,}53+0{,}0123+2{,}307=129{,}8493$
Unitățile de ordinul cel mai mic: 3 zecimi de miimi; miimi: $7+2=9$; sutimi: $1+3=4$; zecimi $3+5=8$; unități simple $2+7=9$; zeci 2; sute 1

```
 127,53 +
   0,0123
   2,307
 --------
 129,8493
```

Așezarea numerelor unele sub altele nu este esențială, putem face adunarea și direct ținînd însă seama de ordinele cifrelor.

2) $127{,}53-24{,}053=103{,}477$.

```
127,53 –
 24,053
-------
103,477
```

La descăzut nu avem miimi; luăm o sutime și o transformăm în 10 miimi, 10 miimi — 3 miimi = 7 miimi.

La descăzut au rămas 2 sutimi din care nu putem scădea 5 sutimi. Luăm o zecime și obținem $10+2=12$ (sutimi).

12 sutimi — 5 sutimi = 7 sutimi au rămas 4 zecimi

$$7u-4u=3u$$

$$2z-2z=0\ z.$$

Exerciții de adunare și scădere cu numere fracționare

a) Fracții zecimale

$A = 3\frac{2}{5} - 0{,}75$. Transformăm fracția $\frac{2}{5}$ în număr zecimal

$A = 3{,}4 - 0{,}75 = 2{,}65$. Scădem numerele zecimale.

Scăderea se putea efectua și scriind numărul zecimal ca fracție ordinară.

$A = 3\frac{2}{5} - \frac{75}{100}$. Simplificăm cu 5.

$$A = 3\frac{2}{5} - \frac{15}{20} = 3\frac{8}{20} - \frac{15}{20} = 2\frac{28-15}{20} = 2\frac{13}{20}.$$

b) Fracții ordinare și fracții zecimale

$A = 15\frac{2}{3} + 1{,}25 - 2\frac{5}{7}$. Fracțiile $\frac{2}{3}$ și $\frac{5}{7}$ nu se pot scrie sub formă de numere zecimale cu un număr finit de zecimale.

Transformăm în fracții ordinare

$$A = 15\frac{2}{3} + 1\frac{25}{100} - 2\frac{5}{7} = 15\frac{2}{3} + 1\frac{1}{4} - 2\frac{5}{7}$$

$$A = 16 - 2 + \frac{2\cdot 28}{84} + \frac{21}{84} - \frac{60}{84} = 14\frac{56+21-60}{84}.$$

$$A = 14\frac{17}{84}.$$

Concluzii. În exercițiile în care avem de adunat și scăzut fracții ordinare și numere zecimale lucrăm în numere zecimale numai dacă fracțiile ordinare pot fi înlocuite prin fracții zecimale echivalente (fracții ireductibile cu numitorii numere de forma $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$, α și β numere naturale). Dacă avem și fracții ordinare care au la numitor și alți factori diferiți de 2 sau 5 atunci transformăm numerele zecimale în fracții ordinare.

Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice

Regulă. Pentru a aduna (scădea) două sau mai multe fracții algebrice aducem fracțiile la același numitor apoi facem suma (diferența) numărătorilor și dăm numitorul comun.

Exemple. 1) *Numitorii sînt monoame.*

$E = \frac{^{b^2)}\,3a - b}{a^3b} + \frac{^{ab)}\,2a - 3b}{a^2b^2} - \frac{^{a^2)}\,3a - 2b}{ab^3}$. Numitorul comun a^3b^3 $(a\neq 0)$, $(b\neq 0)$.

$E = \frac{b^2(3a-b) + ab(2a-3b) - a^2(3a-2b)}{a^3b^3}$. Efectuăm înmulțirile la numărător:

$E = \frac{3ab^2 - b^3 + 2a^2b - 3ab^2 - 3a^3 + 2a^2b}{a^3b^3}$. Strîngem termenii asemenea:

$$E = \frac{4a^2b - b^3 - 3a^3}{a^3b^3}.$$

2) *Numitorii sînt polinoame descompuse în factori ireductibili.*

$$E = \frac{a}{(a-b)(a+b)} - \frac{b}{2(a-b)^2} + \frac{a}{6(a+b)^2}.$$

Numitorul comun este $6(a-b)^2(a+b)^2$, $(a-b \neq 0;\ a+b \neq 0)$.

$$E = \frac{6a(a-b)(a+b) - 3b(a+b)^2 + a(a-b)^2}{6(a-b)^2(a+b)^2}.$$

Efectuăm calculele la numărător

$$E = \frac{6a(a^2-b^2) - 3b(a^2+2ab+b^2) + a(a^2-2ab+b^2)}{6(a-b)^2(a+b)^2}.$$

$$E = \frac{6a^3 - 6ab^2 - 3a^2b - 6ab^2 - 3b^3 + a^3 - 2a^2b + ab^2}{6(a-b)^2(a+b)^2},$$

Strîngem termenii asemenea și ordonăm:

$$E = \frac{7a^3 - 5a^2b - 11ab^2 - 3b^3}{6(a-b)^2(a+b)^2}.$$

3) *Numitorii, polinoame reductibile.*

a) $E = \dfrac{6x+1}{30x^2-30} + \dfrac{1}{36x+36} - \dfrac{1}{45x-45}.$

Numitorul comun se stabilește după ce s-au descompus numitorii în factori.

$$E = \frac{6x+1}{2\cdot3\cdot5(x-1)(x+1)} + \frac{1}{2^2 3^2(x+1)} - \frac{1}{3^2\cdot5(x-1)}.$$

Numitorul comun este $2^2\cdot3^2\cdot5(x-1)(x+1)$. Produsul factorilor comuni ş necomuni luați cîte o singură dată la puterea cea mai mare

$$E = \frac{6\cdot(6x+1) + 5(x-1) - 4(x+1)}{2^2\cdot3^2\cdot5(x-1)(x+1)},\ (x-1 \neq 0;\ x+1 \neq 0).$$

Efectuăm înmulțirile la numărător

$$E = \frac{36x + 6 + 5x - 5 - 4x - 4}{2^2\cdot3^2 5(x-1)(x+1)},$$

Strîngem termenii asemenea la numărător

$$E = \frac{37x-3}{180(x^2-1)}.$$

b) $E = \dfrac{1-3x}{9x^2-4} + \dfrac{2}{2-3x} - \dfrac{5}{2+3x}.$

Numitorul comun este $(3x-2)(3x+2)$, $(3x-2 \neq 0;\ 3x+2 \neq 0)$.

A doua fracție are numitorul $2-3x = -(3x-2)$ scriem această fracție cu numitorul $3x-2$ și schimbăm semnul înaintea liniei de fracție.

$$E = \frac{1-3x}{(3x-2)(3x+2)} - \frac{2}{3x-2} - \frac{5}{2+3x}.$$

Aducem la acelaşi numitor

$$E = \frac{1 - 3x - 2(3x + 2) - 5\ (3x - 2)}{(3x + 2)\ (3x - 2)},$$

$$E = \frac{1 - 3x - 6x - 4 - 15x + 10}{(3x - 2)\ (3x + 2)},$$

$$E = \frac{7 - 24x}{(3x - 2)\ (3x + 2)}.$$

Înmulţirea

1. Înmulţirea numerelor naturale (inclusiv 0).

a) Factorii au cîte o singură cifră. Produsul se poate citi direct pe tabelul următor la intersecţia coloanei în care primul număr este unul din factori cu linia în care primul număr este celălalt factor

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Exemplu. Produsul $3 \cdot 7$ se găseşte pe coloana a 3-a şi pe linia a 7-a; $3 \cdot 7 = 21$. Produsul 6×9 se găseşte pe coloana a 6-a şi pe linia a 9-a $6 \cdot 9 = 54$.

Tabelul se formează în felul următor: în prima linie se trec în ordine primele numere naturale, linia a 2-a se formează adunînd numărul corespunzător din prima linie cu el însuşi, linia a treia numerele corespunzătoare din linia I şi linia a II-a; linia a IV-a adunînd numerele corespunzătoare din linia a III-a şi a I ş.a.m.d.

Deci fiecare număr din linia a n-a (o linie oarecare) reprezintă suma a n termeni egali, fiecare termen fiind egal cu numărul corespunzător din coloana I. De exemplu:

21 care se găsește pe linia a 3-a reprezintă suma $(7 + 7 + 7)$ pentru că numărul din linia I corespunzător lui 21 este 7. Numărului 32 care se găsește pe linia a 4-a îi corespunde în linia I numărul 8 deci $32 = 8 + 8 + 8 + 8 = 8 \cdot 4$.

Numărul 32 se mai găsește și pe linia a 8-a și-i corespunde în linia I numărul 4 deci $32 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 8$.

b) Înmulțirea unui număr natural cu 10^n.

Pentru a înmulți un număr cu 10^n adăugăm la dreapta numărului n zerouri.

În adevăr, înmulțind cu 10, numărul se mărește de 10 ori; fiecare cifră devenind de ordinul imediat superior.

$23 \cdot 10 = 230$ 3 unități devin 3 zeci,
2 zeci devin 2 sute.

Înmulțind cu 100 numărul se mărește de 100 ori deci ordinul fiecărei cifre se mărește cu 2.

$35 \cdot 100 = 3\,500$ 5 unități devin 5 sute,
3 zeci devin 3 mii.

În general înmulțind cu 10^n numărul se mărește de 10^n ori deci ordinul fiecărei cifre se mărește cu n.

c) Un factor de mai multe cifre, un factor de o cifră

$P = (a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 10^2 + \dots + a_n 10^n)a,$

$P = aa_0 + aa_1 \cdot 10 + aa_2 10^2 + aa_n 10^n$. Am aplicat distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Pentru a înmulți un număr de mai multe cifre cu un număr de o cifră înmulțim pe rînd cu îmulțitorul numărul unităților, al zecilor, al sutelor ș.a.m.d. apoi adunăm aceste produse.

Exemplu. $P = 2356 \cdot 5$.

$P = (2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6) \cdot 5$. Scrierea sistematică a numărului.

$P = 5 \cdot 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 5 \cdot 10 + 5 \cdot 6$. S-a aplicat distributivitatea înmulțirii față de adunare.

$P = 10 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^2 + 25 \cdot 10 + 3 \cdot 10$. Efectuăm calculele și scriem sistematic numărul.

$P = 10^4 + 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10,$

$P = 10^4 + 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10,$

$P = 11780.$

Practic calculele se fac mintal și se scriu numai cifrele obținute ca unități, zeci ș.a.m.d.

d) Factorii au mai multe cifre

$P = 43 \cdot 52$

$P = 43 \cdot (5 \cdot 10 + 2)$. Am scris sistematic înmulțitorul.

$P = 43 \cdot 5 \cdot 10 + 43 \cdot 2$. Am aplicat distributivitatea înmulțirii față de adunare.

$P = 2150 + 86 = 2236.$

Pentru a înmulţi două numere de mai multe cifre înmulţim unul din factori pe rînd cu numărul unităţilor, al zecilor al sutelor (ş.a.m.d) celui de al doilea factor şi însumăm apoi aceste produse parţial obţinute.

Practic produsele parţiale se scriu unele sub altele pentru a uşura calculele.

$$\begin{array}{r} 43 \times \\ \underline{52} \\ 86 \\ \underline{2150} \\ 2236 \end{array} \quad \text{sau} \quad \begin{array}{r} 43 \times \\ \underline{52} \\ 86 \\ \underline{215} \\ 2236 \end{array}$$

$43u \cdot 2 = 86$ unităţi

$43u \cdot 50 = 2150$ unităţi sau 215 zeci.

Pentru uşurarea scrisului zerourile produselor parţiale obţinute prin înmulţirea deînmulţitului cu un număr de zeci, sute ş.a.m.d., nu se mai scriu avînd grijă însă ca cifrele, de diferite ordine ale produsului parţial, să fie scrise unele sub altele.

Exemple.

1)
$$\begin{array}{r} 75000 \times \\ \underline{320} \\ 150 \\ \underline{225} \\ 24000000 \end{array}$$

Calculăm $75 \cdot 32 \cdot 1000 \cdot 10$. Deci la produsele parţiale nu considerăm şi zerourile de la sfîrşitul factorilor. Ele se vor adăuga la dreapta rezultatului. (Vom mări rezultatul de 10000 ori)

$$75 \cdot 32 = 2400,$$
$$75000 \cdot 320 = 24000000.$$

2) $2500 \cdot 2325 = 5812500$

$$\begin{array}{r} 2325 \times \\ \underline{2500} \\ 11625 \\ \underline{4650} \\ 5812500 \end{array}$$

Pentru simplificarea calculelor aplicăm comutativitatea. Calculăm produsul $2325 \cdot 25$ apoi înmulţim cu 100 $58125 \cdot 100$ (Adăugăm două zerouri la dreapta).

Înmulţirea numerelor zecimale

Regulă. Pentru a înmulţi două numere zecimale, efectuăm înmulţirea numerelor întregi obţinute prin omiterea virgulelor, apoi la produs despărţim de la dreapta la stînga atîtea cifre cîte au la partea zecimală ambii factori împreună.

Exemple.

1) $37{,}25 \cdot 1{,}5 = 55{,}875 \quad \frac{3725}{100} \cdot \frac{15}{10} = \frac{3725 \cdot 15}{1000} = \frac{55875}{1000}$

$$\begin{array}{r} 37{,}25 \times \\ \underline{1{,}5} \\ 18\,625 \\ \underline{37\,25} \\ 55{,}875 \end{array}$$

Am efectuat produsul

$3725 \cdot 15 = 55875.$

Am obţinut 55875 miimi = 55 unităţi şi 875 miimi deci 55,875.

2) $125,03 \cdot 1,042 = 130,28126$

$$\frac{12503}{100} \cdot \frac{1042}{1000} = \frac{12503 \cdot 1042}{100 \cdot 1000}.$$

```
  125,03 ×
   1,042
 --------
   25006
  50012
 12503
 --------
130,28126
```

Înmulţim numerele naturale 12 503 şi 1042. Produsul s-a mărit de $100 \cdot 1000$ ori
Împărţim rezultatul la 100000.
Despărţim la produs $(2 + 3 = 5)$ 5 cifre de la dreapta la stînga.

Împărţirea

Împărţirea numerelor naturale. a) *Deîmpărţitul are două cifre, împărţitorul o singură cifră.*

Împărţirea se face, în acest caz, cu ajutorul tabelului de înmulţire. Aflăm care este numărul care înmulţit cu împărţitorul să ne dea pe deîmpărţit (împărţire exactă) sau cel mai mare număr care înmulţit cu împărţitorul să ne dea un număr mai mic decît deîmpărţitul — rămînînd un rest mai mic decît împărţitorul — (împărţire cu rest).
Proba împărţirii se face pe baza relaţiei cunoscute
Deîmpărţitul = Împărţitorul × Cîtul + Restul.

Exemple. 1) $63 : 7 = 9, \quad 9 \cdot 7 = 63.$

2) $65 : 7 = 9$(rest 2), $65 = 9 \cdot 7 + 2.$

b) *Împărţirea unui număr de mai multe cifre la un număr de o cifră.*

$$A = (a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots a_2 10^2 + a_1 10 + a_0) : a.$$

Aplicăm distributivitatea împărţirii faţă de adunare.

$$A = (a_n : a) \cdot 10^n + (a_{n-1} : a) 10^{n-1} + \ldots + (a_2 : a) 10^2 + (a_1 : a) \cdot 10 + a_0 : a.$$

Regulă. Pentru a împărţi un număr de mai multe cifre la un număr de o cifră, împărţim numărul unităţilor de diferite ordine, începînd cu ordinul cel mai mare, cu numărul de o cifră. Dacă o împărţire nu se face exact, transformăm restul în unităţi de ordinul imediat inferior şi-l adunăm cu numărul de unităţi ale acestui ordin apoi continuăm împărţirea.

Exemple.

1) $8462 : 2; \; (8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2) : 2.$

Aplicînd distributivitatea, avem

$$8462 : 2 = 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10 + 1 = 4231.$$

Practic nu se mai scrie numărul sistematic iar calculele se fac mintal.

Scris

$8462 : 2 = 4231$

Proba: $4231 \cdot 2 = 8462$

Mintal

8 mii : 2 = 4 mii
4 sute : 2 = 2 sute
6 zeci : 2 = 3 zeci
2 unităţi : 2 = 1 unitate

2) $8526 : 3 = 2842$

În scris pentru uşurinţă calculul se poate aşeza astfel

```
8526 | 3
6    |----
---- | 2842
25
24
----
 12
 12
----
 =6
  6
----
  =
```

Scriind produsele parţiale sub unităţile respective facem diferenţa la care alăturăm la dreapta cifra următoare a deîmpărţitului.

8 mii : 3, obţinem 2 mii.
Rămîn 2 mii = 20 sute: $20 + 5 = 25$
25 sute: 3 Obţinem 8 *sute.*
Rămîne 1 sută = 10 zeci $10z + 2z = 12z$
12 zeci : 3 = 4 *zeci* 6 unităţi : 3 = 2 *unităţi*

Proba. $2842 \cdot 3 = 8526$.

Practic produsele parţiale nu se mai scriu

3) $7200 : 7 = 1028$ rest 4.

```
7200 | 7
     |----
=20  | 1028
  60
----
   4
```

7 mii : 7 = 1 mie
$2 < 7$ deci
2 sute = 20 zeci
20 zeci : 7 obţinem 2 *zeci*
rămîn 60 unităţi
$60 : 7 = 8$ Avem 8 *unităţi* şi rămîn 4 unităţi

Proba. $1028 \cdot 7 + 4 = 7196 + 4 = 7200$

c) *Împărţirea numerelor de mai multe cifre.* $A = 475 : 25$. 1°. Aflăm de cîte ori se cuprinde numărul unităţilor de ordinul cel mai mare al împărţitorului în numărul unităţilor de ordinul cel mai mare al deîmpărţitului. Dacă împărţirea nu e posibilă se consideră de la deîmpărţit numărul de unităţi de ordin imediat inferior. În exemplul nostru $4 : 2 = 2$ $(400 : 20 = 20)$.

2°. Înmulţim cîtul parţial obţinut cu împărţitorul şi dacă produsul este mai mic decît numărul unităţilor considerat la deîmpărţit, îl scădem din acest număr. În acest caz cîtul parţial obţinut este prima cifră a cîtului (de ordinul cel mai mare). Dacă produsul este mai mare decît numărul unităţilor considerat la deîmpărţit, micşorăm cîtul parţial cu o unitate şi repetăm calculele. Dacă scăderea se poate face atunci acest număr reprezintă numărul unităţilor de ordinul cel mai mare al cîtului.

În exemplul nostru:

$25 \cdot 2 = 50$, $50 > 47$.

Micşorăm cîtul parţial cu o unitate $2 - 1 = 1$.

$47 - 25 \cdot 1 = 22$ $(22 < 25)$ Restul este 22 zeci.

Deci 1 este prima cifră (de la stînga spre dreapta) a cîtului.

3°. La restul obţinut se adaugă cifra următoare a deîmpărţitului şi continuăm împărţirea în acelaşi mod.

În cazul nostru: $225 : 25$ Obţinem 9; $9 \cdot 25 = 225$

$225 - 9 \cdot 25 = 0$ Deci trecem 9 la cît.

Practic împărţirea se efectuează astfel:

```
475| 25
---|---
225| 19
---
---
```

Despărţim de la stînga spre dreapta două cifre la deîmpărţit. 47 : 25
Obţinem 1. $25 \cdot 1 = 25$
$47 - 25 = 22$. Coborîm cifra următoare la rest
225 : 25 Obţinem 9; $9 \cdot 25 = 225$

Proba. $25 \cdot 19 = 475$.

```
125327| 325
------|----
 2782 | 385
------
  1827
------
  =202
```

$125 < 325$. Despărţim deci 4 cifre
1253 : 325 (12 : 3 = 4)
Încercăm cu 4; $325 \cdot 4 = 1400 > 1253$.
Încercăm cu 3; $325 \cdot 3 = 975 < 1253$ $1253 - 975 = 278$ $(278 < 325)$.
Deci 3 este prima cifră a cîtului şi rămîne un rest de 278 mii.
Coborîm cifra următoare şi continuăm împărţirea 2782 : 325.

Proba:

$$385 \cdot 325 + 202 = 125125 + 202 = 125327.$$

Împărţirea numerelor zecimale

a) Împărţitorul număr întreg

1°) $A = 14,6 : 2 = (14 + 0,6) : 2$

$A = 14 : 2 + 0,6 : 2$. Împărţirea unei sume la un număr

$A = 7 + 0,3 = 7,3$

2°) $A = 14,4 : 3 = (14 + 0,4) : 3$

$A = 14,4 : 3 = 4,8$ 14 : 3 (rest 2 unităţi)

$2u = 20$ zecimi

24 zecimi : 3 = 8 zecimi.

Pentru a împărţi un număr zecimal la un număr întreg procedăm ca la împărţirea numerelor întregi dar, cînd ajungem la partea zecimală, punem virgula la cît.

b) Împărţitorul număr zecimal

1°) $A = 6 : 0,2$

$A = 60 : 2 = 30$

2°) $A = 3,6 : 1,2$

$A = 36 : 12 = 3$

Transformăm împărţitorul în număr întreg. Cîtul nu se schimbă dacă înmulţim ambii termeni ai împărţirii cu acelaşi număr dar restul se măreşte de acel număr de ori.

3°) $A = 3,12 : 1,025$

$A = 3120 : 1025$

3120 : 1025 = 3 (rest 45; deci 45 miimi)

Împărţitorul devine număr întreg dacă îl mărim de 1000 ori.
Înmulţim ambii termeni ai împărţirii cu 1000 cîtul rămîne acelaşi, restul se măreşte de 1000 ori.

Regulă. Pentru a împărți două numere zecimale, înmulțim ambii termeni cu o putere a lui 10, astfel încît împărțitorul să devină număr întreg.

Exemple. 1) $A = 52 : 0{,}72$.

Transformăm împărțitorul în număr întreg $0{,}72 \cdot 100 = 72$. Înmulțim ambii termeni cu 10^2.

$A = 5200 : 72 = 70$ (rest 16, deci 16 sutimi)

$$\begin{array}{r|l} 5200 & 72 \\ \hline 160 & 72 \\ \hline 16 & \end{array}$$

Proba. $0{,}72 \cdot 72 + 0{,}16 = 52$.

Restul s-a mărit de 100 ori deci trebuie micșorat de 100 ori.

2) $A = 1{,}53 : 1{,}2$.

Transformăm împărțitorul în număr întreg, înmulțind ambii termeni cu 10.

$15{,}3 : 12 = 1{,}2$ (rest 9 zecimi)

$A = 1{,}53 : 1{,}2 = 1{,}2$ (rest 9 sutimi)

Proba: $1{,}2 \cdot 1{,}2 + 0{,}09 = 1{,}44 + 0{,}09 = 1{,}53$.

$$\begin{array}{r|l} 15{,}3 & 12 \\ \hline 33 & 1{,}2 \\ \hline 9 & \end{array}$$

Am obținut restul 9 zecimi deci la împărțirea dată, 9 sutimi.

Observare. Împărțirea se putea continua pentru a afla cîtul exact (dacă există) sau cu o aproximație mai bună

$A = 1{,}53 : 1{,}2 = 1{,}275$.

$$\begin{array}{r|l} 15{,}3 & 12 \\ \hline 33 & 1{,}275 \\ \hline 90 & \\ \hline 60 & \\ \hline = = & \end{array}$$

Proba. $1{,}275 \cdot 1{,}2 = 1{,}53$.

$$\begin{array}{r} 1{,}275 \times \\ 1{,}2 \\ \hline 2550 \\ 1275 \\ \hline 1{,}5300 \end{array}$$

Împărțirea unui polinom D la un polinom I este operația prin care obținem o pereche de polinoame C și R care îndeplinesc condiția $D = I \cdot C + R$ în așa fel ca R să aibă gradul mai mic ca I. Dacă $R = 0$ împărțirea se face exact.

Gradul cîtului este egal cu gradul deîmpărțitului minus gradul împărțitorului.

Să considerăm împărțirea:

$$(8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1) : (2x^2 - 2x + 3).$$

Cîtul împărţirii va fi un polinom de gradul $5 - 2 = 3$ adică de forma $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ iar restul un polinom cel mult de gradul 1 adică de forma $R(x) = mx + n$.

Trebuie să determinăm coeficienţii a, b, c, d, m, n. Vom face aceasta pornind de la definiţia împărţirii.

$$8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1 = (2x^2 - 2x + 3)\ (ax^3 + bx^2 + cx + d) + mx + n. \quad (1)$$

Coeficientul lui x^4 din partea întîi a egalităţii este egal cu coeficientul lui x^4 din partea a doua; acesta provine din înmulţirea $2 \cdot a$ şi trebuie să fie egal cu 8 deci

$$2a = 8; \qquad a = 4.$$

$$8x^4 = 2x^2 \cdot 4x^2 \quad \text{sau} \quad 4x^2 = 8x^4 : 2x^2.$$

Deci primul termen al cîtului se obţine prin împărţirea primului termen al deîmpărţitului la primul termen al împărţitorului.

Înlocuind pe a cu 4 egalitatea (1) devine

$$8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1 = (2x^2 - 2x + 3)\ (4x^3 + bx^2 + cx + d) + mx + n \quad (2)$$

sau efectuînd înmulţirea cu $4x^3$:

$$8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1 = (8x^5 - 8x^4 + 12x^3) + (2x^2 - 2x + 3)\ (bx^2 + cx + d) + mx + n$$

iar dacă suprimăm termenii primei paranteze din partea a doua şi adunăm în prima parte opuşii lor obţinem:

$$8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1 - 8x^5 + 8x^4 - 12x^3 = (2x^2 - 2x + 3)\ (bx^2 + cx + d) + mx + n\ .$$

Se reduc termenii asemenea şi obţinem

$$-10x^4 + 16x^3 - 23x^2 - 4x - 1 = (2x^2 - 2x + 3)(bx^2 + cx + d) + mx + n.$$

În mod analog se determină b; $-10 = 2 \cdot b$, deci $b = -5$ şi obţinem $-10x^4 + 16x^3 - 23x^2 - 4x - 1 = (2x^2 - 2x + 3)\ (-5x^2 + cx + d) + mx + n$.

Urmînd aceeaşi cale obţinem $c = 3$, $d = -1$; $m = -15$ şi $n = 2$.

În practică calculele se aşază în felul următor:

Deîmpărţitul	Împărţitorul
— — — — — — —	Cîtul
— —'— — — —	
Restul	

$$
\begin{array}{l|l}
8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1 & 2x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-8x^5 + 8x^4 - 12x^3 & 4x^3 - 5x^2 + 3x - 1 \\ \cline{1-1}
\quad - 10x^4 + 16x^3 - 23x^2 & \\
\quad\; 10x^4 - 10x^3 + 15x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 6x^3 - 8x^2 - 4x - 1 & \\
\qquad - 6x^3 + 6x^2 - 9x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad - 2x^2 - 13x - 1 & \\
\qquad\qquad + 2x^2 - 2x + 3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad - 15x + 2 &
\end{array}
$$

Împărţim primul termen al deîmpărţitului la primul termen al împărţitorului $8x^5 : 2x^2 = 4x^3$; $4x^3$ este primul termen al cîtului. Cu $4x^3$ înmulţim termenii împărţitorului şi rezultatele le scădem din termenii corespunzători ai deîmpărţitului. Continuăm împărţirea; împărţim restul obţinut la împărţitor deci pe $-10x^4$ îl împărţim la $2x^2$ şi obţinem cîtul $5x^2$, care este al doilea termen al cîtului. Cu $-5x^2$ înmulţim termenii cîtului şi-i scădem din restul parţial $-10x^4 + 16x^3 - 23x^2$ obţinînd rezultatul $6x^3 - 8x^2$ la care mai adăugăm din deîmpărţit pe $-4x - 1$.

Al treilea termen al cîtului este obţinut prin împărţirea lui $6x^3$ la $2x^2$; $(6x^3 : 2x^2 = 3x)$. Înmulţim cu $3x$ termenii împărţitorului şi rezultatele le scădem din al doilea rest parţial.

Al patrulea şi ultimul termen al cîtului rezultă din împărţirea $-2x^2 : 2x^2 = -1$. Înmulţim termenii cîtului cu -1 şi-i scădem din al treilea rest parţial. Al patrulea rest parţial este restul împărţirii deoarece fiind de gradul întîi — mai mic decît gradul împărţitorului, împărţirea nu mai poate continua.

Proba împărţirii se face prin înmulţire

$$(4x^3 - 5x^2 + 3x - 1)\ (2x^2 - 2x + 3) + (-15x + 2) = 8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1.$$

Dacă restul este 0 zicem că împărţirea s-a făcut exact.

Exemple:

1)
$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + x^3y - xy^3 - y^4 & x^2 - y^2 \\ \cline{2-2}
-x^4 \qquad + x^2y^2 & x^2 + xy + y^2 \\ \cline{1-1}
\ /\quad x^3y + x^2y^2 - xy^3 & \\
\quad - x^3y \qquad\quad + xy^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad /\quad x^2y^2 - y^4 & \\
\qquad\quad - x^2y^2 + y^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad /\quad / &
\end{array}
$$

Proba: $(x^2 + xy + y^2)\ (x^2 - y^2) = x^4 + x^3y + x^2y^2 - x^2y^2 - xy^3 - y^4 = x^4 + x^3y - xy^3 - y^4$

2) $$\begin{array}{l|l} a^5 + b^5 & a + b \\ \cline{2-2} -a^5 - a^4 b & a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4 \\ \cline{1-1} \quad / \; -a^4 b + b^5 & \\ \quad\;\; + a^4 b + a^3 b^2 & \\ \cline{1-1} \qquad / \quad a^3 b^2 + b^5 & \\ \qquad\;\; - a^3 b^2 - a^2 b^3 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad / \; -a^2 b^3 + b^5 & \\ \qquad\quad\;\; + a^2 b^3 + ab^4 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad / \quad ab^4 + b^5 & \\ \qquad\qquad\;\; - ab^4 - b^5 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\quad / \quad / & \end{array}$$

Proba: $(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b) =$

$$\begin{array}{l} a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 + \\ \quad + a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 + b^5 \\ \hline a^5 \quad / \quad / \quad / \quad / \quad + b^5 \end{array}$$

Înmulțirea fracțiilor algebrice

Două fracții algebrice se înmulțesc înmulțind numărătorii între ei și numitorii între ei.

Înainte de a efectua calculele se fac toate simplificările posibile.

Exemple. 1) $E = \frac{2x + 2y}{5xy} \cdot \frac{20\ xy}{4x^2 - 4y^2}$.

Descompunem în factori și înmulțim

$E = \frac{2(x + y) \cdot 20xy}{5xy \cdot 4(x - y)\ (x + y)}$. Simplificăm fracția cu $20\ xy\ (x + y)$

$(x \neq 0;\ y \neq 0;\ x + y \neq 0;\ x - y \neq 0)$,

$E = \frac{2}{x - y}$.

2) $E = \frac{x^2 - 9y^2}{27y^2} \cdot \frac{9y^2}{x^2 - 6xy + 9y^2}$. Descompunem în factori numărătorii și numitorii.

$E = \frac{(x - 3y)\ (x + 3y) \cdot 9y^2}{27y^2(x - 3y)^2}$.

Simplificăm fracția cu $9y^2(x - 3y)$, $(y \neq 0,\ x - 3y \neq 0)$.

$E = \frac{x + 3y}{3(x - 3y)}$.

3) $E = \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}}{5xy} \cdot \frac{15y}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}} \cdot \frac{\frac{1}{3}x}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x}$

Descompunem în factori:

$$E=\frac{\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)\cdot 15y\cdot\frac{1}{3}x}{5xy\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x\right)}.$$

Simplificăm fracția cu $5xy\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)$

$$\left(x\neq 0,\ y\neq 0,\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\neq 0,\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\neq 0\right).$$

$E=\frac{1}{-1}$ • $E=-1$

Împărțirea fracțiilor algebrice

Pentru a împărți două fracții algebrice înmulțim prima fracție cu inversa celei de-a doua:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}\ \left(\frac{C}{D}\neq 0\right).$$

Exemple.

1) $E=\frac{27x^3-1}{27x^3+1}:\frac{9x^2+3x+1}{9x^2-3x+1}$,

$$E=\frac{27x^3-1}{27x^3+1}\cdot\frac{9x^2-3x+1}{9x^2+3x+1}.$$

Descompunem în factori

$$E=\frac{(3x-1)\ (9x^2+3x+1)\ (9x^2-3x+1)}{(3x+1)\ (9x^2-3x+1)\ (9x^2+3x+1)}.$$

Simplificăm cu $(9x^2+3x+1)\ (9x^2-3x+1)\neq 0$.

$$E=\frac{3x-1}{3x+1}\qquad (3x+1\neq 0).$$

Observare. Exercițiul se putea efectua direct observînd că

$$27x^3-1=(3x-1)\ (9x^2+3x+1),$$
$$27x^3+1=(3x+1)\ (9x^2-3x+1)$$

și efectuînd împărțirea fracțiilor împărțind numărătorii între ei și numitorii între ei.

$$E=\frac{(3x-1)\ (9x^2+3x+1):(9x^2+3x+1)}{(3x+1)\ (9x^2-3x+1):(9x^2-3x+1)}=\frac{3x-1}{3x+1}.$$

Pentru a împărți un produs cu un număr este suficient să împărțim un factor al produsului cu acel număr.

2) $E=\frac{2x^3+6x^2+6x+2}{5x+5}:\frac{2x^2+4x+2}{5}$, $(x+1\neq 0)$.

Descompunem în factori şi înmulţim prima fracţie cu inversa fracţiei a doua.

$$E = \frac{2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}{5(x + 1)} : \frac{2(x^2 + 2x + 1)}{5}.$$

$$E = \frac{2(x + 1)^3}{5(x + 1)} \cdot \frac{5}{2(x + 1)^2}. \quad E = 1.$$

Am simplificat cu $2 \cdot 5\ (x + 1)^3 \neq 0$.

Ridicarea unei fracţii la o putere cu exponent număr întreg pozitiv (natural)

Pentru a ridica o fracţie la o putere cu exponent număr natural ridicăm la această putere atît numărătorul cît şi numitorul

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n = \frac{P^n}{Q^n}.$$

În adevăr, $\left(\frac{P}{Q}\right)^n = \underbrace{\frac{P}{Q} \cdot \frac{P}{Q} \cdot \ldots \cdot \frac{P}{Q}}_{n \text{ factori}} = \frac{P \cdot P \cdot \ldots \cdot P}{Q \cdot Q \cdot \ldots \cdot Q} = \frac{P^n}{Q^n}$.

Exemple. 1) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$; $\left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{8}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

2) $\left(\frac{2xy^3}{ab}\right)^3 = \frac{8x^3y^9}{a^3b^3}$; $\left(-\frac{xy^2}{ab^2}\right)^2 = \frac{x^2y^4}{a^2b^4}$; $\left(-\frac{x - y}{3xy}\right)^5 = -\frac{(x - y)^5}{3^5x^5y^5} = -\frac{(x - y)^5}{243x^5y^5}$.

Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr raţional pozitiv

a) Numărul este întreg pozitiv şi este format din două cifre

1) $\sqrt{81} = 9$ căci $9^2 = 81$.

2) $\sqrt{83} \approx 9$ căci $81 < 83 < 100$ deci $9 < \sqrt{83} < 10$.

83 este cuprins între două pătrate perfecte consecutive 81 şi 100 şi rădăcina pătrată a lui 83 va fi cuprinsă între $\sqrt{81}$ şi $\sqrt{100}$, deci un număr cuprins între 9 şi 10. Zicem că 9 este rădăcina pătrată a lui 83 cu aproximaţie prin lipsă iar 10 este rădăcina pătrată a lui 83 cu aproximaţie prin adaos (9 este însă mai apropiat de $\sqrt{83}$).

3) $\sqrt{79} \approx 9$, $8^2 < 79 < 9^2$, $8 < \sqrt{79} < 9$.

$\sqrt{79}$ fiind mai apropiat de 81 decît de 64 putem lua rădăcina pătrată prin adaos.

Observări. 1) În general dacă un număr natural A nu este pătrat perfect şi a este rădăcina pătrată a lui A prin lipsă (a^2 este cel mai mare număr natural pătrat perfect mai mic decît A), atunci

$$a^2 < A < (a + 1)^2 \quad \text{şi} \quad a < \sqrt{A} < a + 1.$$

În acest caz diferenţa $A - a^2$ se numeşte restul extragerii rădăcinii pătrate.

2) Din $A < (a+1)^2$ obținem scăzînd din ambii membri a^2.

$$A - a^2 < (a+1)^2 - a^2; \qquad A - a^2 < 2a + 1.$$

b) Numărul natural are trei sau patru cifre:
$100 < N < 10000$. Rădăcina pătrată va fi cuprinsă între 10 și 100; $10 < \sqrt{N} < 100$. Rădăcina pătrată va fi deci un număr de două cifre. $\sqrt{N} = 10z + u$ (z și u fiind respectiv cifra zecilor și a unităților).

Dacă extragerea se face exact $N = (10z + u)^2$; dacă extragerea nu se face exact $N \approx (10z + u)^2$ sau $(10z + u)^2 < N < (10z + u + 1)^2$.

Exemple.

$\sqrt{6400} = 10z + u$ sau $64 \cdot 100 = 100z^2 + 2 \cdot 10z \cdot u + u^2$.

Cifra zecilor z se află extrăgînd rădăcina pătrată din numărul sutelor $\sqrt{64} = 8$, $64 \cdot 100 = 64 \cdot 100 + 160u + u^2$.

deci $u = 0$; $\sqrt{6400} = 80$.

2) $\sqrt{6561} \approx 10z + u$.

$65 \cdot 100 + 61 \approx 100z^2 + 2 \cdot 10zu + u^2$. Cifra zecilor este $\sqrt{65} \approx 8$.

$6561 \approx 6400 + 20 \cdot 8 \cdot u + u^2$; $6561 - 6400 = 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot u + u^2$.

$161 \approx 20 \cdot 8 \cdot u + u^2$. Pentru a determina pe u neglijăm u^2 și obținem o valoare pentru u

$$161 \approx 20 \cdot 8 \cdot u, \quad u \approx \frac{161}{160}. \text{ Deci } u = 1$$

$161 \approx 2 \cdot 8 \cdot 10u + u^2$; dar $u = 1$, $161 = 160 + 1$. Extragerea s-a făcut exact $\sqrt{6561} = 81$.

3) $\sqrt{6342}$ Procedăm în mod analog.

63'42
$\sqrt{63} \approx 7$

1) Despărțim de la dreapta la stînga o grupă de 2 cifre. Extragem rădăcina pătrată din numărul sutelor.

$6342 = 100z^2 + 2 \cdot 10zu + u^2$

$63 - 49 = 14$
$144 : (2 \cdot 7) \approx 9$
$149 \times 9 = 1341$
$1442 - 1341 = 101$
$\sqrt{6342} \approx 79$
(restul 101)

2) Ridicăm 7 la pătrat și rezultatul îl scădem din 63 la rezultat alăturăm grupa următoare (42) [$6342 - 4900 = 1442$].

3) Despărțim o cifră la rest de la dreapta spre stînga și vedem de cîte ori dublul cifrei zecilor se cuprinde în numărul rămas ($1442 \approx 2 \cdot 10 \cdot 7u + u^2$) ($1442 \approx 2 \cdot 10 \cdot 7u$) și obținem cifra unităților $u \approx \frac{144}{14} \approx 9$.

4) Alăturăm numărului format de dublul cifrei zecilor cifra unităților (9) și numărul format îl înmulțim cu 9 și produsul îl scădem din rest (1442).

Practic calculele se așază astfel:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6342} & 79 \\ \hline 1442 & 149 \cdot 9 \\ \hline =101 & \end{array}$$

Proba $$79^2 + 101 = 6342.$$

b) *Numărul întreg pozitiv este format din mai multe cifre*

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2'28'01} & 151 \\ \hline 12'8 & 25 \cdot 5 = 125 \\ \hline 30'1 & 301 \cdot 1 = 301 \\ \hline === & \end{array}$$

Proba.

$$\begin{array}{r} 151 \times \\ 151 \\ \hline 151 \\ 755 \\ 151 \\ \hline 22801 \end{array}$$

1) Despărțim numărul de la dreapta la stînga în grupe de cîte două cifre ultima grupă putînd să aibă o singură cifră 2'28'01.

2) Prima cifră a rădăcinii pătrate va fi dată de rădăcina pătrată exactă sau cu aproximație prin lipsă din ultima grupă: $\sqrt{2} \approx 1$.
Scriem 1 la dreapta numărului deasupra liniei orizontale. Rădăcina pătrată a ultimei grupe o ridicăm la pătrat și rezultatul îl scădem din grupa respectivă

$$1^2 = 1 \quad , \quad 2 - 1 = 1.$$

3) La restul obținut coborîm grupa următoare (28) și despărțim la numărul obținut o cifră de la dreapta la stînga. Sub linia orizontală trecem dublul rădăcinei aflate $1 \cdot 2$ și alăturăm cîtul împărțirii grupei rămase la rest prin acest număr, iar numărul obținut îl înmulțim cu acest cît.

Dacă produsul obținut este mai mare decît restul atunci micșorăm cîtul aflat cu o unitate și repetăm operațiile. Dacă produsul este mai mic decît restul acest număr (cîtul — 1) este a doua cifră a rădăcinii.

În cazul nostru,

$$12 : 2 = 6,$$

$$26 \cdot 6 = 156 > 128.$$

Scădem o unitate la cîtul obținut

$$25 \cdot 5 = 125 < 128.$$

Deci 5 este a doua cifră a rădăcinii.

4) Pentru a afla a treia cifră procedăm în mod analog
Dublăm rădăcina aflată

$$15 \cdot 2 = 30.$$

Coborîm la rest (3) grupa următoare (01) și obținem 301. Despărțim o cifră de la dreapta spre stînga $30 \cdot 1$.

$$30 : 30 = 1,$$

$$301 \cdot 1 = 301.$$

Dacă 1 este ultima cifră a rădăcinii (de la stînga la dreapta),

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{37'12'35} & 609 \\ \hline 11235 & 1209\cdot 9 \\ \hline ==354 & \end{array} \quad , \quad \sqrt{37} \approx 6 \quad , \quad 6^2 = 36.$$

$6 \cdot 2 = 12$, $11 : 12 = 0, \ldots$

adăugăm 0 la dreapta lui 6.

Coborîm grupa următoare

$60 \cdot 2 = 120,$

$1123 : 120 \approx 9,$

$1209 \cdot 9 = 10881 < 11235;$

9 este ultima cifră a rădăcinii.

Proba. $609^2 = 370881,$

$370881 + 354 = 371235.$

Dacă rădăcina nu se extrage exact atunci numărul este egal cu pătratul rădăcinii aproximative prin lipsă plus restul.

Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv

c) *Numărul este zecimal.*

La extragerea rădăcinii dintr-un număr zecimal procedăm la fel ca în cazul numerelor naturale avînd grijă ca la partea zecimală să avem un număr par de cifre (cînd împărțim în grupe virgula desparte două grupe).

Exemple. $$\begin{array}{r|l} \sqrt{1,21} & 1,1 \\ \hline =21 & 21 \cdot 1 = 21 \\ \hline == & \end{array}$$

Cînd am coborît grupa formată de zecimi și sutimi punem virgula la rezultat.

Putem extrage rădăcina fără să ținem seama de virgulă apoi să despărțim la rezultat atîtea cifre la partea întreagă cîte grupe a avut partea întreagă a numărului ($\sqrt{121} = 11$). La numărul 1,21 avem o grupă la partea întreagă deci vom avea o cifră la partea întreagă a rezultatului $\sqrt{1,21} = 1,1$.

2) $\sqrt{12,1}$.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12,10} & 3,4 \\ \hline 31\cdot 0 & 64 \cdot 4 = 256 \\ 25\ 6 & \\ \hline =54 & \end{array}$$

La partea zecimală avem o singură cifră adăugăm un zero pentru a completa grupa $\sqrt{12} \approx 3$, $3^2 = 9$, $31 : 6 \approx 5$,

$65 \cdot 5 = 325 > 310,$

$64 \cdot 4 = 256 < 310.$

Numărul 12,10 are o grupă la partea întreagă deci vom avea o cifră la partea întreagă a rădăcinii.

Proba. $3,4 \cdot 3,4 = 11,56$, restul 54 sutimi

$11,56 + 0,54 = 12,10.$

Observare. Dacă vrem să găsim rădăcina cu aproximație de o sutime continuam calculul coborînd lîngă 54 două zerouri (grupa următoare).

Rădăcina pătrată dintr-o fracție

Pentru a extrage rădăcina pătrată dintr-o fracție putem proceda în două moduri.

1. Extragem rădăcina pătrată din numărător și din numitor $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Acest procedeu este convenabil cînd unul cel puțin din termenii fracției este pătrat perfect.

Exemple. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx \frac{2,2}{3}$.

Dacă nici unul din termeni nu este pătrat perfect, putem face noi ca numitorul sau numărătorul să fie pătrat perfect prin amplificarea fracției.

Exemplu. $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

2. Transformăm fracția ordinară în număr zecimal și extragem rădăcina din rezultat

1) $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1,50} \approx 1,2$;

$\sqrt{1,50}$	1,2
=50	22·2 = 44
6	

2) $\sqrt{\frac{175}{32}} \approx \sqrt{5,4687}$;

175	32
150	5,4687
220	
280	
240	
16	

$\sqrt{5,46\cdot87}$	2,33
14·6	43·3 = 129
=1787	
=398	463·3 = 1389

Probă. $2,33^2 + 0,0398 = 5,4289 + 0,0398 = 5,4687$.

Este util să reținem rădăcini aproximative mai des întîlnite în practică

$\sqrt{2} \approx 1,414$; $\sqrt{3} \approx 1,73$;

$\sqrt{2}$	1,414
10,0	24·4 = 96
400	281·1 = 281
11900	284·4 = 11296
==604	

$\sqrt{3}$	1,73
200	27·7 = 189
=1100	343·3 = 1029
71	

Aplicații

1. *Extragerea rădăcinii dintr-un produs*

$$\sqrt{2\cdot9\cdot16}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=\sqrt{2}\cdot3\cdot4=12\sqrt{2}\simeq12\cdot1,41=16,92.$$

Am extras radicalul din fiecare factor.
Extrăgînd rădăcina pătrată din produs obținem:

$\sqrt{2\cdot9\cdot16}=\sqrt{288}$

$\sqrt{288}$	16,97
18.8	$26\cdot6=156$
= 320.0	$329\cdot9=2961$
=2390.0	
== 191	$3387\cdot7=23709$

Pentru a scoate zecimale considerăm că numărul are, la partea zecimală, atîtea grupe de cîte două zerouri cît ne sînt necesare.

Observare. Dacă luăm $\sqrt{2}\approx1,414$, obținem un rezultat apropiat mai mult de 16,97. În adevăr, $1,414\cdot12=16,968$.

Prima metodă este mai avantajoasă cînd există și factori pătrate perfecte căci se fac calcule mult mai simple.

2. *Extragerea rădăcinii cu aproximație dată*

Să calculăm $\sqrt{173}$ cu aproximație prin lipsă de $\frac{1}{100}$ (cu două zecimale) și apoi cu aproximație prin adaos de $\frac{1}{100}$.

$\sqrt{173}$	13,15
= 7.3	$23\cdot3=69$
=400	$261\cdot1$
1390.0	$2625\cdot5=13125$
==775	

Proba: $13,15^2+0,0775=172,9225+0,0775=173$
cu aproximație prin adaos $\sqrt{173}\approx13,16$

3. *Extragerea rădăcinii pătrate dintr-o fracție*

Să se calculeze $\sqrt{\frac{37}{3}}$

a) $\sqrt{\frac{37}{3}}=\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}}\approx\frac{6,08}{1,37}\approx3,5$,

$\sqrt{37}$	6,08
	$120\cdot8=9664$.
10000	
=336	

b) $\sqrt{\frac{37}{3}}=\sqrt{\frac{37\cdot3}{9}}=\frac{\sqrt{111}}{3}\approx\frac{10,5}{3}=3,5$,

$\sqrt{1.11}$	10,5
1.100	$205\cdot5$.
75	

c) $\sqrt{\frac{37}{3}}\approx\sqrt{12,33}\approx3,5$,

$\sqrt{12,33}$	3,5
33.3	$65\cdot5=325$.
==8	

Al doilea procedeu a condus la calcule mai simple.

Observări.

1) Dacă avem o sumă de numere iraționale (de exemplu de rădăcini pătrate din numere care nu sînt pătrate perfecte) putem calcula suma cu aproximație prin lipsă sau prin adaos.

Exemple. 1) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1{,}41 + 1{,}73 = 3{,}14$

și $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1{,}42 + 1{,}74 = 3{,}16,$

$$3{,}14 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}16.$$

2) $\pi + \sqrt{2} \approx 3{,}14 + 1{,}41 = 4{,}55$, $\pi + \sqrt{2} \approx 3{,}15 + 1{,}42 = 4{,}57$, $4{,}55 < \pi + \sqrt{2} < 4{,}57$.

2) Dacă într-o sumă există mai mulți termeni care cuprind rădăcina pătrată a aceluiași număr (același număr irațional), putem strînge acești termeni aplicînd proprietățile operațiilor (comutativitate, asociativitate, distributivitatea înmulțirii față de adunare) care se aplică și în cazul operațiilor cu numere iraționale.

Exemple. $\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} = (\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) + (3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) =$

$$= \sqrt{2}\,(1 - 2) + \sqrt{5}\,(3 + 2) = -\sqrt{2} + 5\sqrt{5} \approx -1{,}41 + 5 \cdot 2{,}23,$$

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} \approx -1{,}41 + 11{,}15 = 9{,}74.$$

3) Dacă avem o fracție cu numitorul rădăcina pătrată dintr-un număr real putem transforma fracția într-o fracție echivalentă cu numitorul număr rațional amplificînd fracția cu acea rădăcină pătrată.

Exemple. $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}; \quad \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

4) În practică dacă rădăcinile pătrate nu se extrag exact ele se înlocuiesc cu valorile lor aproximative în rezultatul final. În același fel procedăm cînd în calcule intervin și alte numere iraționale.

Exemple.

1) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei

$$V = \frac{1}{3}\,[\pi I \cdot R^2 + \pi I r^2 + \pi I R r).$$

Pentru $I = 2$, $R = 4$, $r = 1$,

$$V = \frac{\pi I}{3}\,(R^2 + r^2 + Rr),$$

$$V = \frac{\pi \cdot 2}{3}\,(16 + 1 + 4) = \frac{2 \cdot 21 \cdot \pi}{3} = 14\pi,$$

$V \approx 14 \cdot 3{,}14$; $\qquad V \approx 43{,}96$.

2) Să se calculeze:

$$E = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

$E = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{2}}{2}$ am înlocuit fracțiile $\frac{2}{\sqrt{3}}$ și $\frac{5}{\sqrt{2}}$ cu $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ și $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (fracții echivalente cu numitorii numere raționale).

$$E = 5\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \left(2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{15\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$E \approx \frac{15 \cdot 1,41}{2} + \frac{4 \cdot 1,73}{3} = \frac{21,15}{2} + \frac{6,92}{3},$$

$$E \approx 10,575 + 2,30 = 12,875.$$

Exerciții.

Operații cu numere raționale și cu fracții algebrice

Ordinea operațiilor și folosirea parantezelor se face după regulile stabilite la operațiile cu numere întregi.

1. $E = 5 \cdot 6 - 8 : 2 + 3^2 + 4^2 \cdot 5 - 20 + 60 : 15.$

Avem o sumă algebrică de mai mulți termeni numere sau produse de numere. Calculăm termenii sumei; efectuăm mai întîi operațiile de ordinul III.

$$E = 5 \cdot 6 - 8 : 2 + 9 + 16 \cdot 5 - 20 + 60 : 15.$$

Efectuăm operațiile de ordinul II.

$$E = 30 - 4 + 9 + 80 - 20 + 4; \; E = 99.$$

Observare. Practic, cînd e posibil, efectuăm în același timp cu operațiile de ordinul III și unele operații de ordinul II (cele care se fac între numere date).

2. $E = 2^3 : 2^2 + 30 - \sqrt{0,25} + 20 - 60 : 30 + 4 \cdot 5.$

Aici putem efectua operațiile de ordinul III și II în același timp ($2^3 : 2^2 = 2$).

$$E = 2 + 30 - 0,5 + 20 - 2 + 20,$$

$$E = 69,5.$$

3. $E = \underbrace{\left\{\left[(5 \cdot 8 - 4) \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 2\right] : 6 + 5\right\}}_{A} \cdot 7 - \underbrace{\left[(3 + 2^2) \cdot \frac{4}{7} - 4\right]}_{B}.$

Avem de efectuat o diferență (ultima operație este o diferență) dintre un produs $A \cdot 7$ și o diferență $B \cdot A$ este o sumă de două produse iar B diferența dintre un produs și un număr.

Pentru a calcula pe A calculăm termenii sumei. Primul termen este cîtul unei sume cu un număr. Pentru a-l calcula pe B, trebuie să calculăm mai întîi 2^2 apoi suma $(3+2^2)$.

$$E=\left\{\left[(40-4)\cdot\frac{1}{2}+6\right]:6+5\right\}\cdot 7-\left[(3+4)\cdot\frac{4}{7}-4\right].$$

Am efectuat operaţiile de ordinul II respectiv III din parantezele mici. Efectuăm calculele din parantezele mici transformînd parantezele în mod corespunzător.

$$E=\left[\left(36\cdot\frac{1}{2}+6\right):6+5\right]\cdot 7-\left(7\cdot\frac{4}{7}-4\right).$$

Efectuăm operaţiile din parantezele mici

$$E=[(18+6):6+5]\cdot 7-(4-4);\ E=(24:6+5)\cdot 7;\ E=(4+5)\cdot 7;\ E=63.$$

4. $E=14\frac{1}{9}-\underbrace{\left\{2\frac{1}{3}-\left[2\frac{7}{90}-\left(1\frac{1}{3}-\frac{7}{45}\right)+6\frac{1}{2}\right]+12\frac{1}{4}\right\}}_{A}.$

Avem de efectuat o diferenţă $14\frac{1}{9}-A$;

A este o sumă algebrică de trei termeni dintre care unul este şi el o sumă. Calculăm acest termem; efectuăm calculele din paranteza mică transformînd parantezele

$$E=14\frac{1}{9}-\left[2\frac{1}{3}-\left(2\frac{7}{90}-1\frac{8}{45}+6\frac{1}{2}\right)+12\frac{1}{4}\right].$$

Avem o diferenţă între un număr şi o sumă algebrică. Calculăm suma efectuînd mai întîi calculele din paranteza mică şi transformăm parantezele:

$$E=14\frac{1}{9}-\left(2\frac{1}{3}-7\frac{7-16+45}{90}+12\frac{1}{4}\right)$$

$$E=14\frac{1}{9}-\left(2\overset{60)}{\frac{1}{3}}-7\overset{2)}{\frac{36}{90}}+12\overset{45)}{\frac{1}{4}}\right).$$

$$E=14\frac{1}{9}-\left(14\frac{105}{180}-7\frac{72}{180}\right).$$

$E=14\frac{1}{9}-7\frac{33}{180}$. Introducem un întreg în fracţia de la descăzut

$$E=13\frac{200}{180}-7\frac{33}{180};\ E=6\frac{167}{180}.$$

5. $$E=\frac{\left[\left(0{,}14:\frac{2}{5}-0{,}42\cdot\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\left(5{,}74+12{,}78\right):\left(1{,}344+2\frac{9}{25}\right)\right]}{\left[(0{,}7835+3{,}6949)-\left(2\frac{3}{4}+1{,}146\right)\right]:\left[\left(3-\frac{9}{50}\right)+\left(9\frac{1}{20}-3{,}55\right)\right]},$$

La numărător avem de efectuat o înmulţire şi o împărţire a unor sume. Vom calcula aceste sume. La numitor avem o împărţire a două sume pe care trebuie să le efectuăm.

Fracţiile ordinare care figurează au ca numitori numere de forma 2^{α}, 5^{β} deci putem lucra cu numere zecimale. Efectuăm calculele din parantezele mici.

$$E = \frac{[(0,14 : 0,4 - 0,21)] \cdot [18,52 : (1,344 + 2,36)]}{[4,4784 - (2,75 + 1,146)] : [(3 - 0,18) + (9,05 - 3,55)]} = \frac{(0,35-0,21)\,(18,52:3,704)}{0,5824 : (2,82 + 5,50)};$$

$$E = \frac{0,14 \cdot 5}{0,5824 : 8,32}\ ; \qquad E = \frac{0,7}{0,07}\ ; \qquad E = 10.$$

6. $$E = \frac{6\frac{5}{6} \cdot 6 - 16}{9 - 6\frac{2}{9}} : \frac{0,83}{1 + \frac{33}{50}} + \frac{8}{1 : 2,25}.$$

Avem de efectuat o sumă dintre un cît de două fracţii şi o fracţie. Calculăm termenii sumei. Vom lucra cu numere zecimale în cazul în care fracţiile sînt zecimale ($1\frac{33}{50} = 1,66$).

$$E = \frac{\frac{41}{6} \cdot 6 - 16}{8\frac{9}{9} - 6\frac{2}{9}} : \frac{0,83}{1,66} + \frac{8}{\frac{100}{225}};$$

$$E = \frac{41 - 16}{2\frac{7}{9}} \cdot \frac{166}{83} + \frac{225 \cdot 8}{100};$$

$$E = \frac{25}{\frac{25}{9}} \cdot 2 + 18; \quad E = 25 \cdot \frac{9}{25} \cdot 2 + 18; \quad E = 18 + 18; \quad E = 36.$$

7. $$E = \frac{\left(17\frac{1}{2} - 8,25 \cdot \frac{10}{11}\right) \cdot \left(11\frac{2}{3} : 2\frac{2}{9} + 3,5\right)}{\left(1,725 : 2,3 - \frac{3}{7}\right) \cdot \left(14\frac{2}{3} - 51,2 : 4\right)}.$$

Numărătorul şi numitorul sînt produse de două sume algebrice. Calculăm aceste sume (Efectuăm calculele din paranteze).

Transformăm în fracţii ordinare

$$E = \frac{\left(17\frac{1}{2} - \frac{825}{110}\right) \cdot \left(\frac{35}{3} : \frac{20}{9} + 3,5\right)}{\left(0,75 - \frac{3}{7}\right) \cdot \left(14\frac{2}{3} - 12,8\right)}; \quad \frac{825}{110} = 7\frac{1}{2};$$

$$E = \frac{\left(17\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{35}{3}\cdot\frac{9}{20} + 3\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{7}\right)\cdot\left(14\frac{2}{3} - 12\frac{4}{5}\right)};$$

$$E = \frac{\left(17\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{7\cdot 3}{4} + 3\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3\cdot 7 - 3\cdot 4}{28}\right)\cdot\left(2\frac{10}{15} - \frac{12}{15}\right)};$$

$$E = \frac{10\left(\frac{21}{4} + 3{,}5\right)}{\frac{21-12}{28}\cdot\left(1\frac{25}{15} - \frac{12}{15}\right)}; \quad E = \frac{10(5{,}25 + 3{,}5)}{\frac{9}{28}\cdot 1\frac{13}{15}};$$

$$E = \frac{10\cdot 8{,}75}{\frac{9}{28}\cdot\frac{28}{15}} = \frac{87{,}5}{\frac{3}{5}} = \frac{875}{10\cdot\frac{3}{5}} = 145\frac{5}{6}$$

8. $$E = \frac{[(0{,}20\cdot 3)^2 + (0{,}4\cdot 0{,}5)^2]\cdot\sqrt{\frac{0{,}(81)}{0{,}(49)}}}{\sqrt{0{,}00001296} + \sqrt{0{,}0016}}.$$

Numărătorul este un produs format dintr-o sumă și rădăcina pătrată a unui cît. Numitorul este o sumă a două rădăcini pătrate. La numărător calculăm factorii produsului; la numitor termenii sumei

$$E = \frac{[(0{,}6)^2 + (0{,}2)^2]\cdot\sqrt{\frac{81}{99}\cdot\frac{99}{49}}}{0{,}0036 + 0{,}04} \cdot \quad 0{,}(81) = \frac{81}{99};\ 0{,}(49) = \frac{49}{99}.$$

$$E = \frac{(0{,}36 + 0{,}04)\,\frac{9}{7}}{0{,}0436}; \quad E = \frac{0{,}4\cdot\frac{9}{7}}{0{,}0436}; \quad E = \frac{4}{10}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{10000}{436}; \quad E = \frac{9000}{763} = 11\frac{607}{763}$$

9. $$E = \left(\frac{3{,}(5) - 1{,}8(3)}{9{,}(7) - 6{,}(4)} : 71\right) : \frac{3{,}1\cdot 0{,}1(01)}{2{,}(15)}.$$

Transformăm numerele zecimale periodice în fracții ordinare

$$\frac{3\frac{5}{9} - 1\frac{83-8}{90}}{9\frac{7}{9} - 6\frac{4}{9}}\cdot\frac{1}{71} : \frac{3{,}1\cdot\frac{101-1}{990}}{2\frac{15}{99}} = \frac{3\frac{5}{9} - 1\frac{75}{90}}{3\frac{3}{9}}\cdot\frac{1}{71} : \frac{3{,}1\cdot\frac{100}{990}}{2\frac{5}{33}}.$$

$$E = \frac{3\overset{2)}{\frac{5}{9}} - 1\frac{15}{18}}{3\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{71} : \left(\frac{31}{10}\cdot\frac{10}{99}\cdot\frac{33}{71}\right);$$

$$E = \frac{2\,\frac{28}{18} - 1\,\frac{15}{18}}{\frac{10}{3}\cdot 71} : \frac{31}{3\cdot 71}; \quad E = 1\,\frac{13}{18}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{71}\cdot\frac{3\cdot 71}{31}; \quad E = \frac{31}{18}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{31} = \frac{1}{20}.$$

10. $$E = \frac{0{,}004 : 0{,}0005}{2{,}4(23) + 3{,}(576) + 2{,}0(001911)} \cdot \frac{2{,}(7) - 0{,}45(3) + 4{,}(5)}{0{,}54(6) + 0{,}(7) - 0{,}02(6)}.$$

Avem de efectuat un produs de două fracţii. Calculăm termenii acestei fracţii. Transformăm în fracţii ordinare.

$$E = \frac{40 : 5}{2\,\frac{423-4}{990} + 3\,\frac{576}{999} + 2\,\frac{1911}{9999990}} \cdot \frac{2\,\frac{7}{9} - \frac{453-45}{900} + 4\,\frac{5}{9}}{\frac{546-54}{900} + \frac{7}{9} - \frac{26-2}{900}};$$

$$E = \frac{8}{2\,\frac{419}{990} + 3\,\frac{576}{999} + 2\,\frac{1911}{9999990}} \cdot \frac{2\,\frac{7}{9} - \frac{408}{900} + 4\,\frac{5}{9}}{\frac{492}{900} + \frac{7}{9} - \frac{24}{900}};$$

$$E = \frac{8}{7 + \frac{419\cdot 10101 + 576\cdot 10010 + 1911}{9999990}} \cdot \frac{6\,\frac{1200-408}{900}}{\frac{468+700}{900}};$$

$$E = \frac{8}{7 + \frac{4232319 + 5765760 + 1911}{9999990}} \cdot \frac{6\,\frac{792}{900}}{\frac{1168}{900}};$$

$$E = \frac{8}{7 + \frac{9999990}{9999990}} \cdot \frac{\frac{6192}{900}}{\frac{1168}{900}}; \quad E = \frac{8}{8}\cdot\frac{6192}{1168} = 5\,\frac{352}{1168}.$$

Simplificînd cu 16, $E = 5\,\frac{22}{73}$.

11. $$E = 6 : \frac{1}{3} - 0{,}8 : \frac{1{,}5}{\frac{3}{2}\cdot 0{,}4\cdot\frac{50}{1 : \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6 - \frac{46}{1 + 2{,}2\cdot 10}}$$

Aducem mai întîi fracţiile la forma cea mai simplă.

$$E = 18 - 0{,}8 : \frac{1{,}5}{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{50}{2}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{0{,}5}}{6 - \frac{46}{1+22}}.$$

Simplificăm fracţiile.

$$E = 18 - 0,8 : \frac{1,5}{15} + \frac{1}{4} + \frac{1+2}{6 - \frac{46}{23}} \ ; \quad E = 18 - 0,8 : \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{3}{6-2};$$

$$E = 18 - 8 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}.$$

$$E = 10 + 1; \quad E = 11.$$

12. $$E = \left(\frac{7\frac{2}{3} - 6\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{14}}{8\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7} - 1\frac{1}{6}} + \frac{7}{18} : \frac{14}{27}\right)\left(\frac{5}{6} - 0,75\right)\cdot\frac{20,4\cdot 4,8\cdot 6,5}{22,1\cdot 1,2};$$

$$E = \left(\frac{7\frac{2}{3} - \frac{98}{15}\cdot\frac{5}{14}}{\frac{35}{4}\cdot\frac{2}{7} - 1\frac{1}{6}} + \frac{7}{18}\cdot\frac{27}{14}\right)\left(\frac{5}{6} - \frac{75}{100}\right)\cdot\frac{\frac{204}{10}\cdot\frac{48}{10}\cdot\frac{65}{10}}{\frac{221}{10}\cdot\frac{12}{10}}$$

$$E = \left(\frac{7\frac{2}{3} - \frac{7}{3}}{\frac{5}{2} - 1\frac{1}{6}} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)\cdot\frac{24}{1};$$

$$E = \left(\frac{7\frac{2}{3} - 2\frac{1}{3}}{2\frac{3}{6} - 1\frac{1}{6}} + \frac{3}{4}\right)\cdot\frac{10-9}{12}\cdot 24;$$

$$E = \left(\frac{5\frac{1}{3}}{1\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}\right)\cdot 2 = \frac{19}{2}.$$

13. Să se calculeze:

$$E = \frac{2:2:2\left\{1\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\left[\frac{4,37}{2\cdot(0,2)^2} - 3,5(6)\left(\sqrt{\frac{2271,049}{10}} - \frac{7}{100}\right)\right]\right\}}{\frac{7}{2} : \frac{3}{5} - \frac{4,2}{2\frac{1}{7}}\left(5,4\cdot\frac{1}{2} + \frac{23}{10}\right) : 7 - \frac{263}{60}}.$$

Efectuăm operaţiile de gradul III şi transformăm 3, 5 (6) în fracţie ordinară:

1° $\sqrt{\frac{2271,049}{10}} = \sqrt{227,1049} = 15,07$;

$\sqrt{227,1049}$ | 15,07
12.7 | 25·5 = 125
21049 3007·7 = 21049
=====

2° $3,5(6) = 3\frac{56-5}{90} = 3\frac{51}{90} = 3\frac{17}{30}$;

3° $\frac{4,37}{2\cdot(0,2)^2} = \frac{4,37}{2\cdot 0,04} = \frac{437}{8} = 54\frac{5}{8}$.

$$E = \frac{1 : 2 \left\{1\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\left[54\frac{5}{8} - 3\frac{17}{30}\left(15{,}07 - 0{,}07\right)\right]\right\}}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{3} - \frac{42}{10}\cdot\frac{7}{15}\,(2{,}7 + 2{,}3)\cdot\frac{1}{7} - 4\frac{23}{60}};$$

$$E = \frac{\frac{1}{2}\left[1\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\left(54\frac{5}{8} - \frac{107}{30}\cdot 15\right)\right]}{\frac{35}{6} - \frac{7}{5\cdot 5}\cdot 5 - 4\frac{23}{60}};$$

$$E = \frac{\frac{1}{2}\left[1\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\left(54\frac{5}{8} - 53\frac{1}{2}\right)\right]}{5\frac{5}{6} - 1\frac{2}{5} - 4\frac{23}{60}}; \quad E = \frac{\frac{1}{2}\left(1\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\cdot 1\frac{1}{8}\right)}{\frac{50 - 24 - 23}{60}};$$

$$E = \frac{\frac{1}{2}\left(1\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)}{\frac{3}{60}}; \quad E = \frac{\frac{1}{2}\left(1\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{20}}; \quad E = \frac{1}{2}\cdot 20; \quad E = 10.$$

14. $E = \left(x - 3 + \frac{2x}{2x - 6}\right) : \left(2x - 1 + \frac{15}{3x - 9}\right).$

Avem de efectuat o împărțire a două sume algebrice. Efectuăm calculele din paranteză avînd grijă să simplificăm fracțiile cînd este posibil.

$$E = \left(x - 3 + \frac{2x}{2(x - 3)}\right) : \left(2x - 1 + \frac{15}{3(x - 3)}\right).$$

Aducem în paranteze la același numitor.

$$E = \frac{(x - 3)^2 + x}{x - 3} : \frac{(2x - 1)\ (x - 3) + 5}{x - 3};$$

$$E = \frac{x^2 - 6x + 9 + x}{x - 3} : \frac{2x^2 - 6x - x + 3 + 5}{x - 3};$$

$$E = \frac{x^2 - 5x + 9}{x - 3}\cdot\frac{x - 3}{2x^2 - 7x + 8} \qquad x - 3 \neq 0.$$

$$E = \frac{x^2 - 5x + 9}{2x^2 - 7x + 8}.$$

15. $E = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{x^2}{a^2b^2}\right)(a^2 + b^2 + x^2) : \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{2}{a^2b^2} - \frac{x^4}{a^4b^4}\right).$

Efectuăm calculele din paranteză aducînd la același numitor.

$$E = \frac{b^2 + a^2 - x^2}{a^2b^2}\cdot(a^2 + b^2 + x^2) : \frac{b^4 + a^4 + 2a^2b^2 - x^4}{a^4b^4}.$$

$$E = \frac{(b^2 + a^2 - x^2)\ (a^2 + b^2 + x^2)\cdot a^4\cdot b^4}{a^2b^2\ (b^4 + a^4 + 2a^2b^2 - x^4)}.$$

Simplificăm fracţia cu factorul $a^2b^2 \neq 0$ şi descompunem în factori polinomul $b^4 + a^4 + 2a^2b^2 - x^4$. Dar $(a^4 + b^4 + 2a^2b^2)$ este un pătrat perfect $(a^2 + b^2)^2$. Deci $b^4 + a^4 + 2a^2b^2 - x^4 = (a^2 + b^2)^2 - x^4$ este o diferenţă de două pătrate:

$$(a^2 + b^2)^2 - x^4 = (a^2 + b^2 + x^2)\ (a^2 + b^2 - x^2)$$

Punem condiţia $a^2 + b^2 - x^2 \neq 0$ căci $a^2 + b^2 + x^2 > 0$.

$$E = \frac{(b^2 + a^2 - x^2)\ (a^2 + b^2 + x^2)a^2b^2}{(a^2 + b^2 + x^2)\ (a^2 + b^2 - x^2)} \quad ; \quad E = a^2b^2.$$

16. Să se calculeze:

$$E = \left(1 - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}\right)\left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}\right) + \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}\right).$$

(G.M.F., seria B nr. 5/1960)

Avem de efectuat o sumă de două produse. Calculăm sumele din paranteze. Aducem fracţiile din paranteze la forma cea mai simplă

$$E = \left(1 - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3 - 1}{6}}\right)\left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3 + 1}{6}}\right) + \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3 - 1}{6}}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3 + 1}{6}}\right);$$

$$E = \left(1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{6}{4}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{4}\right);$$

$$E = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{9}{4}\right) + \left(1 + \frac{3}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\right).$$

Calculăm sumele din paranteze

$$E = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}.$$

Efectuăm produsele şi apoi suma algebrică.

$$E = -\frac{5}{8} + \frac{5}{8} \quad , \quad E = 0.$$

17. Se dă expresia: $E = \dfrac{1 - \dfrac{4x}{(x + 1)^2}}{\dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{2x}{x^2 - 1}}$

şi se cere:

a) Să se aducă la forma cea mai simplă;

b) Să se arate că această expresie nu poate avea valoarea numerică egală cu 1 pentru nici o valoare a lui x;

(G.M.F., seria B nr. 9/1958)

a) Aducem fracţia la forma cea mai simplă aducînd la acelaşi numitor în ambii termeni ai fracţiei.

La numitor c.m.m.m.c. = $(x + 1)(x - 1)$ deoarece $-\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$.

$$E = \frac{\dfrac{x^2 + 2x + 1 - 4x}{(x+1)^2}}{\dfrac{x^2 - x + x + 1 - 2x}{x^2 - 1}}.$$

Strîngem termenii asemenea în ambii termeni ai fracţiei şi efectuăm împărţirea indicată prin linia de fracţie

$$E = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}, \quad (x + 1 \neq 0;\ x - 1 \neq 0).$$

Simplificînd fracţia cu $(x + 1)(x - 1)^2$, $x \neq \pm 1$,

$$E = \frac{x-1}{x+1}.$$

b) $$\frac{x-1}{x+1} = 1.$$

Dar $x - 1 \neq x + 1$ căci $-1 \neq 1$.

18. $$E = \frac{\left(1 - \dfrac{a}{b} + \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{b^3}{a^3}\right)\left(1 - \dfrac{a-b}{a+b}\right) \cdot \dfrac{a+b}{2}}{\left(1 + \dfrac{3b - a}{a+b}\right)(a^2 - b^2)}.$$

$$E = \frac{\dfrac{a^3b - a^4 + b^3a - b^4}{a^3b} \cdot \dfrac{a + b - a + b}{a+b} \cdot \dfrac{a+b}{2}}{\dfrac{a + b + 3b - a}{a+b}(a-b)(a+b)} \quad (a + b \neq 0).$$

Strîngem termenii asemenea.

$$E = \frac{\dfrac{a^3b - a^4 + ab^3 - b^4}{a^3b} \cdot \dfrac{2b}{2}}{4b(a-b)} \quad (a \neq 0;\ b \neq 0;\ a - b \neq 0).$$

Efectuăm împărţirea indicată de linia de fracţie, apoi simplificăm fracţia obţinută.

Descompunem expresia $a^3b - a^4 + ab^3 - b^4$ grupînd convenabil termenii:

$$a^3b - a^4 + ab^3 - b^4 = a^3(b - a) - b^3(b - a) = (b - a)(a^3 - b^3),$$

$$a^3b - a^4 + ab^3 - b^4 = (b - a)(a - b)(a^2 + ab + b^2) = -(a - b)^2(a^2 + ab + b^2).$$

$$E = \frac{-(a-b)^2(a^2 + ab + b^2)}{a^3} \cdot \frac{1}{4b(a-b)}.$$

$$E = \frac{b^3 - a^3}{4a^3b}.$$

19. $E = \left(\frac{8 + a^3}{x^2 - y^2} : \frac{4 - 2a + a^2}{x - y}\right) : \left(x + \frac{xy + y^2}{x + y}\right).$

$$E = \frac{(2 + a)(4 - 2a + a^2)}{(x - y)(x + y)} \cdot \frac{x - y}{4 - 2a + a^2} : \left(x + \frac{y(x + y)}{x + y}\right) \quad (x \pm y \neq 0; 2 - a \neq 0).$$

$$E = \frac{2 + a}{x + y} \cdot \frac{1}{x + y}; \quad E = \frac{2 + a}{(x + y)^2}.$$

20. $E = \frac{a}{(a - c)(a - b)} + \frac{b}{(b - a)(b - c)} + \frac{c}{(c - a)(c - b)}.$

Aducem la același numitor: $(a - b)(b - c)(c - a)$.

$$E = \frac{-a(b - c) - b(c - a) - c(a - b)}{(a - b)(b - c)(c - a)} \quad a \neq b \neq c.$$

Desfacem parantezele.

$$E = \frac{-ab + ac - bc + ab - ac + bc}{(a - b)(b - c)(c - a)}.$$

Strîngem termenii asemenea

$$E = \frac{0}{(a - b)(b - c)(c - a)}; \quad E = 0 \quad (a \neq b \neq c).$$

21. $E = \frac{4a^2}{a^4 + a^3 + a + 1} : \left(\frac{1}{a^2 + 2a + 1} - \frac{2}{a + 1} \cdot \frac{1}{1 - a} + \frac{1}{a^2 - 2a + 1}\right).$

Avem de efectuat o împărțire a unei fracții cu o sumă. Efectuăm suma din paranteză. Numitorul comun: $(a + 1)^2(a - 1)^2$ și

$$-\frac{2}{(a + 1)} \cdot \frac{1}{1 - a} = \frac{2}{(a + 1)(a - 1)}.$$

$$E = \frac{4a^2}{a^4 + a^3 + a + 1} : \frac{a^2 - 2a + 1 + 2a^2 - 2 + a^2 + 2a + 1}{(a - 1)^2(a + 1)^2} \quad (a \pm 1 \neq 0).$$

Strîngem termenii asemenea:

$$E = \frac{4a^2}{a^4 + a^3 + a + 1} : \frac{4a^2}{(a - 1)^2(a + 1)^2}.$$

Împărțim fracțiile apoi simplificăm. Descompunem

$a^4 + a^3 + a + 1 = a^3(a + 1) + (a + 1) = (a + 1)(a^3 + 1) = (a + 1)^2(a^2 - a + 1).$

$$E = \frac{4a^2}{(a + 1)^2(a^2 - a + 1)} \cdot \frac{(a - 1)^2(a + 1)^2}{4a^2} \quad (a \neq 0; \quad a + 1 \neq 0);$$

$$E = \frac{(a - 1)^2}{a^2 - a + 1}; \quad E = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - a + 1}.$$

22. Să se calculeze valoarea numerică a fracției

$$F(x) = \frac{x^3 + (1 - a^2)x - a}{x^3 - a^2x - a^3} \text{ pentru } \begin{cases} 1) \ x = a \\ 2) \ x = -a \\ 3) \ x = 1, \ a = 2 \\ 4) \ x = -1, \ a = -2. \end{cases}$$

1) $F(a) = \frac{a^3 + (1 - a^2)a - a}{a^3 - a^3 - a^3}$;

$F(a) = \frac{a^3 + a - a^3 - a}{-a^3}$; $F(a) = \frac{0}{-a^3}$ $(a \neq 0)$; $F(a) = 0.$

2) $F(-a) = \frac{-a^3 + (1 - a^2)(-a) - a}{-a^3 + a^3 + a^3}$;

$F(-a) = \frac{-a^3 - a + a^3 - a}{-a^3}$;

$F(-a) = \frac{2a}{a^3}$ $a \neq 0$; $F(-a) = \frac{2}{a^2}$ $(a \neq 0)$.

3) $F(1,2) = \frac{1 + (1 - 4) - 2}{1 - 4 - 8}$;

$F(1,2) = \frac{1 - 3 - 2}{-11} = \frac{-4}{-11}$; $F(1,2) = \frac{4}{11}$.

4) $F(-1, -2) = \frac{-1 - (1 - 4) + 2}{-1 + 4 + 8}$;

$F(-1, -2) = \frac{-1 + 3 + 2}{11}$;

$F(-1, -2) = \frac{4}{11}$.

23. Se dau expresiile:

$$A = 4x^2 + (8x^3 - 1) \cdot \left(\frac{2x + 4x^2}{4x^2 - 1} - \frac{2x + 1}{2x - 1}\right),$$

$$B = \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{x^3 - x^2 + x - 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Să se verifice că

$$AB - A + B + 1 = 0.$$

Examen de admitere cl. a IX-a sesiunea iunie 1968—București.

1) $A = 4x^2 + (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)\left(\frac{2x(1 + 2x)}{(1 + 2x)(2x - 1)} - \frac{2x + 1}{2x - 1}\right)$.

Punînd condițiile ca $2x - 1 \neq 0$ și $2x + 1 \neq 0$, simplificăm fracțiile cu acești factori.

$$A = 4x^2 + (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)\frac{2x - 2x - 1}{2x - 1};$$

$$A = 4x^2 - 4x^2 - 2x - 1; \quad A = -2x - 1; \quad A = -(2x + 1).$$

$$B = \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{x^2(x - 1) + (x - 1)}\right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2};$$

$$B = \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{(x - 1)\ (x^2 + 1)}\right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2};$$

$$B = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 2x^2}{(x - 1)\ (x^2 + 1)} \cdot \frac{(x - 1)\ (x + 1)}{x^2},$$

$x^2 + 1 \neq 0$. Punem condiția ca : $x - 1 \neq 0$.

$$B = \frac{x(x^2 + 1)\ (x + 1)}{x^2(x^2 + 1)}; \quad B = \frac{x + 1}{x}.$$

2) $AB - A + B + 1 = 0, \quad A = -(2x + 1); \quad B = \frac{x + 1}{x}.$

$$-(2x + 1) \cdot \frac{x + 1}{x} + 2x + 1 + \frac{x + 1}{x} + 1 = 0.$$

Punem condiția: $x \neq 0$.

$$(-2x) \cdot \frac{x + 1}{x} - \frac{x + 1}{x} + 2x + 1 + \frac{x + 1}{x} + 1;$$

$$-2x - 2 + 2x + 2 = 0$$

Observare. Expresia dată A nu are sens pentru valorile care anulează numitorii $\left(x = \pm \frac{1}{2}\right)$, expresia B dată nu are sens pentru $x = 0$ și $x = 1$, factorul $1 + x^2$ nu se anulează pentru x real.

Expresia $A \cdot B - A + B + 1$ în care A și B sînt aduse la forma cea mai simplă, nu mai are la numitor factorii $(x - 1)$, $(2x + 1)$ și $(x - 1)$ deci ea este verificată și pentru $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$ și $x = 1$. Dacă în expresia $AB - A + B$, A și B reprezintă expresiile date, atunci nu se pune problema verificării identității pentru $x = \pm \frac{1}{2}$ și $x = 1$.

24. Se dau polinoamele:

$P_1 = ax(xy + ax - a) - a^2(x^2 - y)$, $\quad P_2 = ay(xy + ay - a) - a^2(y^2 - x)$,

$P_3 = ax(4xy - a) + ay(a + 3xy)$ și $P_4 = ay(4xy + a) - ax(a - 3xy)$,
unde $a \neq 0$.

1) Să se descompună în factori polinoamele:

$$P_1 + P_2 \qquad \text{și} \qquad P_3 - P_4.$$

2) Să se arate că expresia

$$E(x,y) = \frac{P_1 + P_2}{P_3 - P_4}$$

nu depinde de a.

3) Dacă $y = 5$, pentru ce valori ale lui x expresia $E(x,y)$ nu are sens? Dar dacă $x = 5$, pentru ce valori ale lui y expresia $E(x,y)$ nu are sens?

4) Care este valoarea numerică a expresiei $E(x,y)$ dacă:

$$x = \frac{\left(+\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) - 4\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{3}}$$

și

$$y = \left[4\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) - 5\left(-\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{4}{5}\right) + 5\right] : \left(-\frac{22}{3}\right).$$

Concurs de matematică, clasa a VII-a, etapa locală-București 1969.

1) $P_1 + P_2 = a(x^2y + ax^2 - ax - ax^2 + ay) + a(xy^2 + ay^2 - ay - ay^2 + ax) =$
$= a[x^2y - ax + ay + xy^2 - ay + ax) = a(x^2y + xy^2).$

$P_1 + P_2 = axy(x + y),$

$P_3 - P_4 = a(4x^2y - ax + ay + 3xy^2) - a\ (4xy^2 + ay - ax + 3x^2y) =$
$= a(4x^2y - ax + ay + 3xy^2 - 4xy^2 - ay + ax - 3x^2y) = a(x^2y - xy^2),$

$P_3 - P_4 = axy(x - y).$

2) $E\ (x,y) = \dfrac{axy\ \ (x + y)}{axy\ \ (x - y)}$; $\qquad E(x,y) = \dfrac{x + y}{x - y}$.

3) $E\ (x,5) = \dfrac{x + 5}{x - 5}$; $E(x,5)$ nu are sens pentru $x = 5$.

$E\ (5,y) = \dfrac{5 + y}{5 - y}$; $E(5,y)$ nu are sens pentru $y = 5$.

4) $$x = \frac{\left(+\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) - 4\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{9}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{9}{4}}{\frac{1}{4}} = -\frac{7}{12}\cdot 4 = -\frac{7}{3},$$

$$x = -\frac{7}{3}.$$

$$y = \left[4\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) - 5\left(-\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{4}{5}\right) + 5\right] : \left(-\frac{22}{3}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{4}{3} + 5\right) : \left(-\frac{22}{3}\right) = \frac{22}{3} : \left(-\frac{22}{3}\right) = -1,$$

$$E\left(-\frac{7}{3}, -1\right) = \frac{\frac{-7}{3} - 1}{\frac{-7}{3} + 1} = -\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{-4} = \frac{5}{2}$$

25. 1) Să se efectueze:

$$\frac{8-\left(\frac{1}{x+y}\right)^3}{4-\frac{4}{x+y}+\left(\frac{1}{x+y}\right)^2}-\frac{6}{2x+2y-1}.$$

2) Se dau polinoamele:

$D(x) = 2x^2 - 9x + 15$ și $I(x) = x - 2$.

a) Să se afle cîtul și restul împărțirii $D(x) : I(x)$.

b) Să se găsească valorile întregi ale lui x pentru care fracția $F(x) = \frac{D(x)}{I(x)}$ are valori numerice întregi.

Concurs de matematică, clasa a VIII-a București 1969:

$$1)\ \frac{8-\left(\frac{1}{x+y}\right)^3}{4-\frac{4}{x+y}+\left(\frac{1}{x+y}\right)^2}-\frac{6}{2x+2y-1}=$$

$$=\frac{\left(2-\frac{1}{x+y}\right)\left[4+\frac{2}{x+y}+\left(\frac{1}{x+y}\right)^2\right]}{\left(2-\frac{1}{x+y}\right)^2}-\frac{6}{2x+2y-1}=$$

$$=\frac{4+\frac{2}{x+y}+\left(\frac{1}{x+y}\right)^2}{\frac{2x+2y-1}{x+y}}-\frac{6}{2x+2y-1}=$$

$$=\frac{4(x+y)^2+2(x+y)+1-6(x+y)}{(2x+2y-1)(x+y)}=$$

$$=\frac{4(x+y)^2-4(x+y)+1}{(2x+2y-1)(x+y)}=\frac{(2x+2y-1)^2}{(2x+2y-1)(x+y)}=\frac{2x+2y-1}{x+y}$$

2) a) $(2x^2 - 9x + 15) : (x - 2) = 2x - 5$ (rest 5).

$Q = x - 2$, $R = 5$,

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 9x + 15 & x-2 \\ \hline -5x + 15 & 2x-5 \\ \hline 5 & \end{array}$$

b) Pentru ca fracția $F(x) = \frac{D(x)}{I(x)}$ să aibă valori numerice întregi trebuie să determinăm pe x astfel încît valoarea numerică a împărțitorului $(x - 2)$ să fie un divizor al lui 5. În mulțimea numerelor întregi, 5 are divizorii ± 1, ± 5 deci:

1) $x - 2 = 1$; 2) $x - 2 = -1$; 3) $x - 2 = 5$; 4) $x - 2 = -5$

de unde: $x = 3$; $x = 1$; $x = 7$; $x = -3$.

Observare. În mulțimea numerelor naturale 5 are ca divizori numai numerele 1 și 5 deci, în acest caz, $x = 3$ și $x = 7$.

VI
Rapoarte şi proporţii

Definiţie. Cîtul $\frac{a}{b}$ *în care a şi b sînt numere reale se numeşte raport; a şi b sînt termenii raportului.*

Rapoartele $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ sînt echivalente dacă este satisfăcută relaţia $a \cdot d = b \cdot c$.

Proprietăţi. Amplificarea. $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ (m este număr real) căci $a \cdot b \cdot m = b \cdot a \cdot m$.

Simplificarea. $\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$ căci $ab : m = ba : m$.

Raportul a două segmente este raportul măsurilor lor dacă au fost măsurate cu aceeaşi unitate de măsură. Dacă măsurăm ambele segmente cu altă unitate de măsură, obţinem rapoarte echivalente.

Exemplu. $AB = 3$ cm, $CD = 5$ cm,

$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$. Dar 3 cm = 30 mm, 5 cm = 50 mm.

În acest caz $\frac{AB}{CD} = \frac{30}{50}$, $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$ (rapoarte echivalente).

$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$ (dacă AB a fost împărţit în 3 părţi egale atunci CD are 5 asemenea părţi)

Definiţie. Un raport cu numitorul 100, $\frac{a}{100}$ *se numeşte raport procentual.*

$\frac{a}{100}$ se mai scrie a % şi se citeşte „a la sută". Un raport cu numitorul 1 000 se scrie $a^0/_{00}$ şi se citeşte „a la mie".

Definiţie. Două rapoarte echivalente $\frac{a}{b}$ *şi* $\frac{c}{d}$ *formează o proporţie:* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Termenii a şi d se numesc *extremi*, b şi c, *mezi*.

Proprietatea fundamentală a proporţiilor. Într-o proporţie produsul mezilor este egal cu produsul extremilor.

În adevăr, aceasta e condiția ca rapoartele să fie echivalente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad a \cdot d = c \cdot b.$$

Exemple. 1) Să se verifice dacă rapoartele

$$r_1 = \frac{1\frac{2}{3}}{3\frac{5}{7}} \text{ și } r_2 = \frac{2\frac{1}{2}}{4\frac{1}{3}} \text{ sînt echivalente (formează o proporție).}$$

$$r_1 = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{26} = \frac{35}{78}, \qquad r_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{13} = \frac{15}{26}$$

$$35 \cdot 26 = 910, \; 78 \cdot 15 = 1170.$$

Deci $r_1 \neq r_2$.

2) Aceeași întrebare pentru rapoartele

$$r_1 = \frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{2}{5}} \quad \text{și} \quad r_2 = \frac{3}{5 + \frac{2}{5}}.$$

Aducem rapoartele la forma simplă

$$r_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{9}, \qquad r_2 = 3 : \frac{27}{5}; \qquad 3 : \frac{27}{5} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}.$$

Deci $r_1 = r_2$.

Dacă lucrăm direct, aplicînd proprietatea fundamentală, atunci efectuăm produsele:

$$1\frac{1}{3}\left(5 + \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{27}{5} = \frac{36}{5},$$

$$3 \cdot 2\frac{2}{5} = 3 \cdot \frac{12}{5} = \frac{36}{5},$$

deci $r_1 = r_2$.

3) Să se calculeze termenul necunoscut din proporțiile:

a) $\frac{x}{3} = \frac{7}{5}$; b) $\frac{5}{x} = \frac{7}{8}$; c) $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$; d) $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$

Aplicăm proprietatea fundamentală a proporției.

a) $5x = 3 \cdot 7$; $5x = 21$. Cunoaștem produsul și unul din factori.

$$x = \frac{21}{5}.$$

Termenul necunoscut se numeşte al patrulea proporţional între trei numere date.

b) $\frac{5}{x} = \frac{7}{8}$; $\quad 5 \cdot 8 = 7x$; $\quad x = \frac{5 \cdot 8}{7}$; $\quad x = \frac{40}{7}$

c) $cx = ab$; $\quad x = \frac{ab}{c}$; $\quad$ d) $ac = bx$; $\quad x = \frac{ac}{b}$.

Media proporţională. Numărul b care ocupă într-o proporţie cu termeni pozitivi locul mezilor sau al extremilor se numeşte media proporţională a celorlalte două numere a şi b.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \text{ sau } \frac{a}{b} = \frac{c}{a}.$$

Aflarea mediei proporţionale:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Aplicăm proprietatea fundamentală a proporţiei $a \cdot c = b^2$ de unde $b = \sqrt{ac}$.

Regulă. Media proporţională, b, a două numere a şi c, se află extrăgînd rădăcina pătrată din produsul celor două numere.

Proprietate a două rapoarte echivalente. Raportul format făcînd suma (diferenţa) numărătorilor pe suma (diferenţa) numitorilor este un raport echivalent cu rapoartele date.

$$\text{Dacă } 1)\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ atunci } \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}.$$

În adevăr, din (1), $ad = bc$.

Adunînd (scăzînd) în ambii membri ab, $ad \pm ab = bc \pm ab$ sau $a(d + b) = b(c + a)$, deci $\frac{a}{b} = \frac{c+a}{d+b}$.

Proporţii derivate

1) *Schimbînd mezii între ei sau extremii între ei sau şi mezii şi extremii între ei, obţinem tot proporţii.*

Dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci 1) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, $\quad$ 2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\quad$ 3) $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

În adevăr, din $ad = bc$ rezultă pe baza proprietăţilor de comutativitate a produsului:

1) $da = bc$, 2) $ad = cb$, 3) $da = cb$.

2) *Amplificînd sau simplificînd un termen sau amîndoi termenii unei proporţii, obţinem tot o proporţie.*

Consecinţă. Dacă înmulţim sau împărţim ambii numărători sau ambii numitori ai rapoartelor — termenii proporţiei — cu acelaşi număr, obţinem tot o proporţie.

Exemple. $\frac{5}{27} = \frac{10}{54}$, $\quad \frac{5}{27:3} = \frac{10}{54:3}$ sau $\frac{5}{9} = \frac{10}{18}$ căci $5 \cdot 18 = 90$.

3) *Dacă într-o proporție înlocuim termenii corespunzători din cele două rapoarte prin suma sau diferența termenilor raportului respectiv obținem tot o proporție.*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}; \qquad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

În adevăr, din $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ avem (schimbînd mezii)

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Aplicînd proprietatea rapoartelor echivalente avem

$\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}$. Schimbînd mezii între ei,

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}.$$

4) *Dacă se dă o proporție* $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$ *atunci putem obține o nouă proporție egalînd raportul format de suma numărătorilor pe suma numitorilor cu raportul format de diferența numărătorilor pe diferența numitorilor.*

Dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ avem și $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$.

În adevăr, dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ atunci $a = bk$, $c = dk$,

Adunînd (scăzînd) membru cu membru cele două egalități,

$$a \pm c = k(b \pm d) \quad \text{deci} \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = k.$$

Șir de rapoarte echivalente. Într-un șir de rapoarte echivalente raportul format de suma numărătorilor pe suma numitorilor este echivalent cu rapoartele date.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots = \frac{l}{m} = \frac{a+c+e+\ldots+l}{b+d+f+\ldots+m}.$$

Notînd $k = \frac{a}{b}$,

$$a = bk; \qquad c = dk; \ldots; \ l = mk.$$

Prin însumare $a + c + e + \ldots + l = k(b + d + f + \ldots + m)$,

de unde: $\frac{a+c+e+\ldots+l}{b+d+f+\ldots+m} = k$.

Exemplu.

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{1+3+5}{2+6+10} = \frac{1+3+5+7}{2+6+10+14}$$

$$\frac{1+3+5}{2+6+10} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1+3+5+7}{2+6+10+14} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

Mărimi proporționale

Numim mărime constantă mărimea care păstrează aceeași valoare într-o problemă dată.

Exemple: viteza într-o mișcare uniformă; raportul dintre lungimea cercului și diametru (π) etc.

Numim mărime *variabilă* o mărime a cărei valoare se schimbă (într-o problemă dată).

Definiție. Două mărimi variabile, care depind una de alta astfel încît dacă una crește de un număr de ori cealaltă crește (se micșorează) de același număr de ori, se numesc mărimi direct (invers) proporționale.

Exemple. 1) Timpul și distanța parcursă în mișcarea uniformă sînt mărimi direct proporționale.

2) Timpul și viteza cînd distanța este constantă sînt mărimi invers proporționale.

3) Aria dreptunghiului și înălțimea cînd baza rămîne constantă sînt mărimi direct proporționale.

4) Cantitatea de marfă și prețul total cînd prețul unitar este constant sînt mărimi direct proporționale.

5) Prețul unitar și prețul total cînd cantitatea este constantă sînt mărimi invers proporționale.

6) Numărul lucrătorilor (cu aceeași productivitate) și timpul necesar efectuării unei lucrări sînt mărimi invers proporționale.

Dacă două mărimi sînt direct proporționale raportul a două valori ale uneia din ele este egal cu raportul valorilor corespunzătoare ale celeilalte.

Dacă mărimile sînt invers proporționale raportul a două valori ale uneia din ele este egal cu inversul raportului valorilor corespunzătoare ale celeilalte mărimi.

Exemple. 1) Dacă un mobil merge cu viteza constantă v atunci distanța depinde de timp după cum rezultă din tabelul:

t	$\frac{1^h}{2}$	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h
s	$\frac{v}{2}$	v	$2v$	$3v$	$4v$	$5v$

Raportul a două valori din primul șir este egal cu raportul valorilor corespunzătoare din al doilea șir.

$$\frac{2}{3} = \frac{2v}{3v}; \quad \frac{2}{5} = \frac{2v}{5v}; \quad \frac{1}{4} = \frac{v}{4v} \text{ etc.}$$

2) Dacă un mobil parcurge o distanță d, timpul necesar depinde de viteza mobilului după cum rezultă din tabelul:

v în km/oră	1	2	3	5	7
t în ore	d	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{3}$	$\frac{d}{5}$	$\frac{d}{7}$

Raportul a două valori din primul şir este egal cu inversul raportului valorilor corespunzătoare din al doilea şir

de exemplu: $\frac{1}{3} = \frac{\frac{d}{3}}{d}$; $\frac{2}{5} = \frac{\frac{d}{5}}{\frac{d}{2}}$; $\frac{2}{7} = \frac{\frac{d}{7}}{\frac{d}{2}}$; $\frac{3}{7} = \frac{\frac{d}{7}}{\frac{d}{3}}$; $\frac{7}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{d}{7}}$ etc.

Observare. Există mărimi care depind una de alta fără a fi proporţionale. De exemplu: latura şi aria triunghiului echilateral, raza şi aria cercului, timpul şi distanţa în mişcarea neuniformă etc. Dacă latura triunghiului echilateral se măreşte de 2, 3, 4, 5 ori, aria sa se măreşte de 4, 9, 16, 25 ori (fig. 7).

Numere direct sau invers proporţionale cu alte numere

Două numere x şi y sînt direct proporţionale cu alte două numere a şi b dacă $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

Mai multe numere $x, y, z, u, v, \ldots$ sînt proporţionale cu tot atîtea numere $a, b, c, d, e\ldots$, dacă rapoartele formate cu numerele din primul şir şi numerele corespunzătoare din al doilea şir sînt echivalente.

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d} = \ldots.$$

Mai multe numere $x, y, z, \ldots$ sînt invers proporţionale cu alte numere $a, b, c, \ldots$ dacă sînt direct proporţionale cu numerele $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots.$

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \ldots.$$

A împărţi un număr N în părţi direct proporţionale cu n numere date, înseamnă a găsi n numere care să fie proporţionale cu numerele date şi a căror sumă să fie N.

De exemplu, să se împartă numărul N în părţi proporţionale cu numerele a, b, c. Fie cele trei numere x, y, z.

Trebuie ca: $x + y + z = N$ şi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

A împărţi un număr N în părţi invers proporţionale cu n numere date $(a, b, c\ldots)$ înseamnă a împărţi numărul N în părţi direct proporţionale cu numerele $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots.$

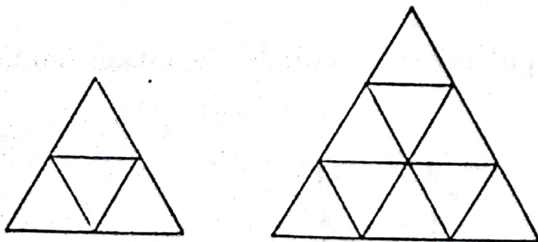


Fig. 7

Exemple. 1) Să se împartă 2 250 în părţi direct proporţionale cu numerele 2, 3, 4. Căutăm 3 numere x, y, z astfel ca:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \text{ şi } 2\,250 = x + y + z.$$

Aplicînd proprietatea unui şir de rapoarte echivalente

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{2250}{9} = 250.$$

$$x = 500,\ y = 750,\ z = 1\,000.$$

2) Să se împartă numărul 310 în părţi invers proporţionale cu numerele 2, 3, 5.

Trebuie să găsim 3 numere x, y, z astfel ca $x + y + z = 310$; $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{5}}$.

Aducem fracţiile la acelaşi numitor $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$; $\frac{1}{3} = \frac{10}{30}$; $\frac{1}{5} = \frac{6}{30}$.

Şirul de rapoarte devine:

$\frac{x}{\frac{15}{30}} = \frac{y}{\frac{10}{30}} = \frac{z}{\frac{6}{30}}$. Împărţind fiecare raport cu 30 obţinem tot rapoarte echivalente.

$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}$. Deci N se împarte în părţi direct proporţionale cu numerele 15, 10, 6 (numărătorii fracţiilor după ce le-am adus la acelaşi numitor).

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{310}{31} = 10; \quad x = 150 : y = 100; \ z = 60.$$

Observări. 1) Dacă numerele x, y, z sînt invers proporţionale cu numerele a, b, c, atunci raportul a două numere din primul şir este egal cu raportul invers al numerelor corespunzătoare din al doilea şir.

2) Pentru a împărţi un număr în părţi direct proporţionale cu mai multe fracţii aducem fracţiile la acelaşi numitor apoi împărţim numărul în părţi direct proporţionale cu numărătorii acestor fracţii (aduse la acelaşi numitor).

3) Pentru a împărţi un număr în părţi invers proporţionale cu mai multe numere a, b, c împărţim numărul în părţi direct proporţionale cu $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$.

4) Dacă numerele x, y, z sînt proporţionale cu numerele a, b, c, atunci ele sînt proporţionale şi cu ka, kb, kc, k fiind orice număr real diferit de zero.

Dacă $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ prin împărţirea raportului cu k obţinem tot rapoarte egale:

$$\frac{x}{ka} = \frac{y}{kb} = \frac{z}{kc}.$$

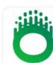
Exemple.

Să se împartă numărul 100 în părţi direct proporţionale cu numerele $1\frac{1}{2}$, $2\frac{5}{6}$, $2\frac{1}{3}$.

Numerele le scriem sub formă de fracţii echivalente aduse la acelaşi numitor $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$, $2\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$, $2\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=\frac{14}{6}$. Cele 3 numere vor fi x, y, z date de relaţiile:

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{17}=\frac{z}{14}=\frac{100}{40}=\frac{5}{2}.$$

$$x=\frac{45}{2}=22{,}5, \qquad y=\frac{85}{2}=42{,}5, \qquad z=35.$$



VII
Ecuații și sisteme de ecuații

I. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

Fiind dat polinomul $P(x)$, dacă aflăm valorile lui x, într-o anumită mulțime numerică, pentru care polinomul se anulează, spunem că am rezolvat ecuația cu o singură necunoscută $P(x) = 0$ în mulțimea numerică dată.

Valorile necunoscutei care satisfac ecuația se numesc rădăcini sau soluții ale ecuației.

Se numesc ecuații echivalente ecuațiile care au aceleași rădăcini în mulțimea dată (Rădăcinile uneia din ecuații sînt și rădăcini ale celeilalte și reciproc).

Dacă ecuația este satisfăcută de orice valori (din mulțimea considerată) date necunoscutei atunci avem o identitate.

Dacă ecuația nu e satisfăcută de nici o valoare din mulțimea considerată spunem că ecuația nu are soluție în această mulțime.

O ecuație în care numai necunoscuta este notată cu o literă ($x,y,z,...$) iar cantitățile cunoscute prin numere, se numește ecuație cu coeficienți numerici.

Exemplu. $5x - 3 = 7 + x$.

Dacă coeficienții (sau numai unii din ei) sînt exprimați prin litere ($a,b,c,...$), atunci ecuația are coeficienți literali și se numește ecuație literală.

Exemple. $ax + 3 = b - 3x$; $\quad ax + 2bx = cx + d$.

Proprietățile egalităților

Egalități numerice

1) Dacă adunăm sau scădem același număr în ambii membri ai unei egalități, obținem tot o egalitate.
Exemplu. $3 = 5 - 2$,

$$3 + 11 = 5 - 2 + 11.$$

Ecuații

1) Dacă adunăm sau scădem același număr în ambii membri ai unei ecuații, obținem o ecuație echivalentă.
Exemplu: $x + 2 = 3$ este satisfăcut de $x = 1$, și numai de această valoare. Ecuațiile $x + 2 \pm 1 = 3 \pm 1$; $x + 3 = +4$; $x + 1 = 2$.
admit ca singură rădăcină $x = 1$.

Consecință. Dacă într-o ecuație trecem un termen dintr-un membru în altul cu semnul schimbat, obținem o ecuație echivalentă.

$$x + a = 2a \text{ are soluția } x = a.$$
$$x + a - a = 2a - a \text{ are soluția } x = a.$$

2) Dacă înmulţim sau împărţim ambii membri ai unei egalităţi cu un număr diferit de zero obţinem tot o egalitate

$$15 = 50 - 35,$$

$$15 \cdot 2 = (50 - 35) \cdot 2,$$

$$15 : 5 = (50 - 35) : 5.$$

2) Dacă înmulţim sau împărţim ambii membri ai unei ecuaţii cu acelaşi număr diferit de zero obţinem o ecuaţie echivalentă.

Exemple: 1) $2x + 1 = 7$ are soluţia $x = 3$

$3(2x + 1) = 3 \cdot 7.$

$6x + 3 = 21$ are soluţia $x = 3$

căci $3 \cdot 7 = 3 \cdot 7.$

2) $4x + 2 = 6$ are soluţia $x = 1$

$(4x + 2) : 2 = 6 : 2.$

$2x + 1 = 3$ are soluţia $x = 1$

căci $6 : 2 = 6 : 2.$

Consecinţe. 1) Dacă avem o ecuaţie de forma $ax = b (a \neq 0)$ împărţim cu a ambii membri şi obţinem $x = \frac{b}{a}$ (soluţia ecuaţiei). În adevăr $a \cdot \frac{b}{a} = b.$

2) Dacă toţi coeficienţii unei ecuaţii sînt divizibili cu un număr, putem împărţi ambii membri ai ecuaţiei cu acest număr.

3) Dacă ecuaţia are numitori (numerici) îi eliminăm prin înmulţirea ambilor membri ai ecuaţiei, cu numitorul comun şi obţinem o ecuaţie echivalentă.

Exemple

1) Ecuaţia $\frac{5x}{2} - 1 = \frac{13}{2}$ are soluţia $x = 3.$

Aducînd la acelaşi numitor avem:

$\frac{5x - 2}{2} = \frac{13}{2}$ înmulţim în ambii membri cu 2 obţinem

$5x - 2 = 13$ care are rădăcina tot $x = 3.$
Cele două ecuaţii sînt echivalente.

2) Dacă numitorii conţin şi litere punem condiţia ca numitorii să fie diferiţi de zero, căci împărţirea la zero nu are sens.

Ecuaţia $\frac{1 - x}{x} = -\frac{1}{2}$ are soluţia $x = 2.$

Aducem la acelaşi numitor: $\frac{2 - 2x}{2x} = -\frac{x}{2x}.$

Eliminăm numitorul $(x \neq 0)$. Ecuaţia $2 - 2x = -x$ are soluţia $x = 2$. În adevăr, $2 - 2 \cdot 2 = -2.$

3) Dacă înmulţim ambii membri cu o expresie care conţine necunoscuta obţinem în general o ecuaţie care nu este echivalentă cu ecuaţia dată (dacă acest factor se anulează).

Ecuaţia $x - 1 = 2$ are soluţia $x = 3.$

Înmulţim în ambii membri cu $(x - 2)$.

$(x - 2)(x - 1) = 2(x - 2)$ şi obţinem ecuaţia

$x^2 - 3x + 2 = 2x - 4$ care admite rădăcina $x = 3.$

$9 - 9 + 2 = 6 - 4; \qquad 2 = 2.$

Ecuația mai admite însă și soluția $x = 2$.

În adevăr, $4 - 6 + 2 = 4 - 4$.

Deci ecuația obținută nu este echivalentă cu cea dată căci ecuația $x - 1 = 2$ nu admite rădăcina $x = 2$;

$$2 - 1 \neq 2.$$

Dacă o ecuație cu o necunoscută este echivalentă cu o ecuație de forma $ax + b = 0$ sau $ax = b$ (forma normală a ecuației) atunci ecuația este de gradul I. Pentru a aduce o ecuație la forma normală facem toate operațiile indicate.

a) Desfacem parantezele (dacă există).

b) Eliminăm numitorii (dacă există) punînd condiția ca numitorii să fie diferiți de zero.

c) Aplicăm proprietățile ecuațiilor echivalente trecînd toți termenii care conțin necunoscuta într-un membru și termenii care nu conțin necunoscuta în celălalt membru.

d) Stringem termenii asemenea în ambii membri.

Exemple

1) $13x - 8(3x - 2) = -7x - 5(12 - 3x)$.

Desfacem parantezele

$$13x - 24x + 16 = -7x - 60 + 15x.$$

Trecem termenii care conțin necunoscuta în membrul întîi iar termenii liberi (de grad zero) în membrul al doilea.

$$13x - 24x + 7x - 15x = -60 - 16.$$

Stringem termenii asemenea:

$$-19x = -76.$$

Ecuația obținută este de forma

$ax = b$ în care $a = -19$ și $b = -76$; $\qquad x = \frac{-76}{-19} = 4$.

2) $\overset{2)}{\frac{2x - 5}{6}} + \overset{3)}{\frac{x + 2}{4}} = \overset{4)}{\frac{5 - 2x}{3}} - \overset{3)}{\frac{6 - 7x}{4}} + \overset{12)}{1}$.

Aducem la același numitor (12)

$$\frac{4x - 10 + 3x + 6}{12} = \frac{20 - 8x - 18 + 21x + 12}{12}.$$

Înmulțim în ambii membri cu numitorul comun (12),

$$4x - 10 + 3x + 6 = 20 - 8x - 18 + 21x + 12.$$

Separăm termenii de gradul I și de gradul zero în cei doi membri ai ecuației

$$4x + 3x + 8x - 21x = 10 - 6 + 20 - 18 + 12.$$

Stringem termenii asemenea

$$-6x = 18.$$

Ecuația este de forma $ax = b$ în care $a = -6$; $b = 18$;

$$x = \frac{18}{-6} = -3.$$

3) $\frac{x}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{m} - \frac{x}{n}$ $\quad m \neq 0 \quad , \quad n \neq 0$

Aducem la același numitor (mn) și eliminăm numitorul $(mn \neq 0)$:

$$nx + m = n - mx$$

Scriem ecuația sub forma normală $(n + m)x + m - n = 0$

Ecuația $(n + m)\ x = n - m$ este de forma $ax = b$ în care $a = m + n$ și $b = n - m$.

$$x = \frac{n - m}{m + n}, \qquad m + n \neq 0.$$

Dacă $m = -n$ ecuația (3) devine:

$$3') \quad \frac{x}{m} + \frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \frac{x}{m}$$

sau

$$x - 1 = 1 + x, \text{ care nu are soluție } (-1 \neq 1)$$

Concluzie.

Pentru a rezolva o ecuație de gradul I cu o necunoscută, aducem ecuația la forma normală

$$ax + b = 0 \qquad \text{sau} \qquad ax = -b$$

și rezolvăm ecuația obținută.

Exemple

1) $(m - 1)x + 2 + m = 2m - 3x.$

Aducem ecuația la forma normală.

$mx - x + 3x = 2m - m - 2$ (stringem termenii asemenea și dăm pe x factor comun)

$mx + 2x = m - 2$

$x(m + 2) = m - 2$

$x = \frac{m - 2}{m + 2}.$ (împărțim în ambii membri cu coeficientul lui x cu condiția $m + 2 \neq 0$).

Dacă $m = -2$ ecuația (1) devine

1') $-3x = -4 - 3x$ care nu are soluție.

Verificarea se face în ecuația dată

I $\qquad (m - 1)\ \frac{m - 2}{m + 2} + \overset{m+2)}{2} + \overset{m+2)}{m};$ $\qquad$ II $\qquad \overset{m+2}{2m} - 3 \cdot \frac{m - 2}{m + 2}.$

Aducem la acelaşi numitor şi facem operaţiile indicate de semne

$$\text{I} \qquad \frac{m^2 - 3m + 2 + m^2 + 4m + 4}{m + 2} = \frac{2m^2 + m + 6}{m + 2}$$

$$\text{II} \qquad \frac{2m^2 + 4m - 3m + 6}{m + 2} = \frac{2m^2 + m + 6}{m + 2}.$$

Pentru ambii membri am găsit aceeaşi expresie, deci $x = \frac{m-2}{m+2}$ este rădăcina ecuaţiei date, m fiind orice număr real în afară de $m = -2$ pentru care expresia $\frac{m-2}{m+2}$ nu are sens

$$2) \quad \frac{1}{x-2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}.$$

Ecuaţia are sens pentru orice x număr real în afară de $x = 2$ pentru care fracţia $\frac{1}{x-2}$ nu are sens. Aducem ecuaţia la forma normală.

$$\frac{6 - 4(x-2)}{6(x-2)} = \frac{-x+2}{6(x-2)}$$

Eliminăm numitorul înmulţind cu ambii membri ai ecuaţiei cu $6(x-2)$ căci $x - 2 \neq 0$.

$6 - 4x + 8 = -x + 2.$

Separăm termenii.

$-4x + x = 2 - 8 - 6;$

Strîngem termenii asemenea împărţind cu coeficientul necunoscutei.

$-3x = -12,$

$$x = \frac{-12}{-3},$$

$$x = 4.$$

Verificare: I $\quad \frac{1}{4-2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6},$

II $\quad -\frac{1}{6}.$

$x = 4$ este soluţia ecuaţiei date.

În practică pentru simplificarea scrisului înainte de a separa termenii sau de a elimina numitorii putem face reducerea termenilor asemenea în fiecare membru.

De exemplu în ecuaţia:

$-5x + 3 - 7x + 9 = -x + 1 + 2x - 15$ strîngem termenii asemenea în fiecare membru.

$-12x + 12 = x - 14$ apoi separăm termenii

$$-12x - x = -14 - 12; \quad -13x = -26; \; x = \frac{-26}{-13}; \; x = 2.$$

$$3) \; \frac{x^2 - 3}{1 - x^2} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{1+x}.$$

Pentru ca fracţiile să aibă sens, numitorii trebuie să fie diferiţi de zero deci $1 - x \neq 0$ şi $1 + x \neq 0$ sau $x \neq 1$ şi $x \neq -1$.
Aducem la acelaşi numitor.

$$\frac{x^2 - 3}{(1 - x)(1 + x)} + \overset{-(x+1)}{\frac{x + 1}{x - 1}} = \overset{1-x}{\frac{4}{1 + x}}.$$

Înmulţim cu numitorul comun $(1 - x^2) \neq 0$, desfacem paranteza, strîngem termenii asemenea în fiecare membru. Separăm termenii şi strîngem termenii asemenea.

$$x^2 - 3 - (x + 1)^2 = 4 - 4x$$

$$x^2 - 3 - x^2 - 2x - 1 = 4 - 4x$$

$$-2x + 4x = 4 + 4$$

$$2x = 8.$$

$$x = \frac{8}{2}; \quad x = 4.$$

Verificare. I $\frac{16 - 3}{1 - 16} + \frac{4 + 1}{4 - 1} = \frac{13}{-15} + \frac{5}{3}$

$$-\frac{13}{15} + \frac{25}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

II $\frac{4}{1 + 4} = \frac{4}{5}$; $x = 4$ este soluţia ecuaţiei.

Discuţia ecuaţiei de gradul I cu o necunoscută

Ecuaţia $ax = b$ are soluţia $x = \frac{b}{a}$ cu condiţia $a \neq 0$.

Dacă $a = 0$ întîlnim situaţiile:
1. $b \neq 0$ — ecuaţia nu are soluţie: este imposibilă;
2. $b = 0$ — ecuaţia are o infinitate de soluţii; este nedeterminată. Egalitatea dată este o identitate.

Exemple. 1) $2x - 5 = x + 6 + x$

$$2x - 5 = 2x + 6$$

$$2x - 2x = 6 + 5$$

$$0 \cdot x = 11, \ (a = 0, \ b \neq 0)$$

Dar $x \cdot 0 = 0$ (orice număr înmulţit cu 0 este 0) deci nu există nici o valoare a necunoscutei pentru care $0 \cdot x = 11$. Ecuaţia nu are soluţie, este imposibilă.

2) $3x + 6 = 2x + x + 4 + 2,$

$$3x + 6 = 3x + 6,$$

$$3x - 3x = 6 - 6$$

$0 \cdot x = 0$; x poate lua orice valoare. Ecuaţia 2) este o identitate (este verificată de orice valori date necunoscutei).

De exemplu pentru: $x = -1$; $-3 + 6 = -2 - 1 + 4 + 2$.

$x = 2$; $6 + 6 = 4 + 2 + 4 + 2$.

$x = \frac{1}{2}$; $\frac{3}{2} + 6 = 1 + \frac{1}{2} + 4 + 2$; $7\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$.

$x = 0$; $6 = 4 + 2$.

$x = -5$; $-15 + 6 = -10 - 5 + 4 + 2$. $-9 = -9$.

II. Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute

Se numește sistem de două ecuații cu două necunoscute un ansamblu de două ecuații cu aceleași necunoscute.

Un sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute are forma normală

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

unde a, b, c, a', b', c' sînt numere.

Două sisteme sînt echivalente dacă au aceleași soluții.

Un sistem se aduce la forma normală pe baza proprietăților stabilite la ecuațiile de gradul I cu o necunoscută.

A rezolva un sistem de ecuații înseamnă a găsi soluția sau rădăcinile sistemului. Dacă sistemul are două necunoscute trebuie să găsim perechile de numere care verifică sistemul dat.

Pentru a rezolva un sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute înlocuim sistemul dat printr-un sistem echivalent în care o ecuație are o singură necunoscută (se elimină una din necunoscute).

Pentru eliminarea uneia din necunoscute, vom folosi una din cele trei metode: 1) metoda substituției; 2) metoda reducerii; 3) metoda comparației.

1) Metoda substituției

Sistemul $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ este echivalent cu

sistemul $\begin{cases} y = \dfrac{c - ax}{b} \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ în care am considerat pe x ca fiind cunoscută și am rezolvat ecuația în y. (Am presupus $b \neq 0$.)

Înlocuim expresia care ni-l dă pe y în cea de-a doua ecuație și obținem sistemul

$$\begin{cases} y = \dfrac{c - ax}{b} \\ a'x + b'\dfrac{c - ax}{b} = c' \end{cases}$$

în care ultima ecuație are o singură necunoscută.

Rezolvăm această ecuație.

$$ba'x + b'c - b'ax = c'b$$
$$x(ba' - b'a) = c'b - b'c$$
$$x = \frac{c'b - b'c}{ba' - b'a}.$$

Aflăm pe y din prima ecuație a sistemului.

$$y = \frac{c - a\dfrac{c'b - b'c}{ba' - b'a}}{b}$$
$$y = \frac{c(ba' - b'a) - a(c'b - b'c)}{b(ba' - b'a)}$$
$$y = \frac{cba' - cb'a - ac'b + ab'c}{b(ba' - b'a)}$$
$$y = \frac{b(ca' - ac')}{b(ba' - b'a)}.$$

Soluția sistemului este:

$$x = \frac{c'b - b'c}{ba' - b'a}, \qquad y = \frac{ca' - ac'}{ba' - b'a} \qquad (ba' - b'a \neq 0).$$

Exemple.

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 4x - 5y = 10 \end{cases}$ sistemul este echivalent cu

$$\begin{cases} x = \dfrac{16 - 3y}{2} \\ 4 \cdot \dfrac{16 - 3y}{2} - 5y = 10. \end{cases}$$

Ultima ecuație conține numai o singură necunoscută (y). Aflăm valoarea lui y.

$$2(16 - 3y) - 5y = 10; \; 32 - 6y - 5y = 10; \; -11y = -22; \; y = 2;$$
$$x = \frac{16 - 3 \cdot 2}{2}; \; x = 8 - 3, \qquad x = 5.$$

Soluția sistemului este $\begin{cases} x = 5. \\ y = 2 \end{cases}$

Verificare (în sistemul dat).

	Membrul I	Membrul II
Prima ecuație:	$2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 10 + 6;$	16.
A doua ecuație:	$4 \cdot 5 - 5 \cdot 2 = 20 - 10;$	10.

2) $\begin{cases} \dfrac{7x - 3y}{5} = \dfrac{5x - y}{3} - \dfrac{x + y}{2} \\ 3(x - 1) = 5(y + 1). \end{cases}$

Aducem sistemul la forma normală: eliminăm numitorii; desfacem parantezele; separăm termenii care conțin necunoscutele într-un membru iar termenii liberi în celălalt membru.

$$\begin{cases} 6(7x - 3y) = 10(5x - y) - 15(x + y), \\ 3(x - 1) = 5(y + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 42x - 18y = 50x - 10y - 15x - 15y \\ 3x - 3 = 5y + 5 \end{cases}$$

$\begin{cases} 7x + 7y = 0 \\ 3x - 5y = 8. \end{cases}$ Împărțim ambii membri ai primei ecuații cu 7.

$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 5y = 8. \end{cases}$ Înlocuim cu sistemul echivalent

$\begin{cases} y = -x \\ 3x - 5(-x) = 8, \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x \\ 3x + 5x = 8, \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x \\ 8x = 8, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$

Verificare.

Prima ecuație: I) $\frac{7 + 3}{5} = 2$; II) $\frac{5 + 1}{3} - \frac{0}{2} = \frac{6}{3}$.

A doua ecuație: I) $3 \cdot 0 = 0$; II) $5 \cdot 0 = 0$.

2) Metoda reducerii

Sistemul $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ este echivalent cu

sistemul $\begin{cases} ax + by = c \\ (a'b - ab')y = a'c - ac'. \end{cases}$

Ecuația a doua s-a obținut prin eliminarea necunoscutei x. S-a înlocuit mai întîi sistemul dat printr-un sistem echivalent în care necunoscuta x (pe care am eliminat-o) are coeficienții opuși (egali în valoare absolută dar de semne contrare). Adunînd cele două ecuații membru cu membru s-a obținut ecuația a doua care nu-l mai cuprinde pe x.

Ecuația a doua ne dă pentru y

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \quad (a'b - ab' \neq 0).$$

Înlocuind pe y în prima ecuație cu această valoare, obținem valoarea lui x:

$$ax + \frac{ba'c - bac'}{a'b - ab'} = c,$$

$$ax = \frac{ca'b - cab' - ba'c + bac'}{a'b - ab'},$$

$$ax = \frac{a(bc' - cb')}{a'b - ab'}.$$

Împărţind cu $a(a \neq 0)$ în ambii membri se obţine

$$x = \frac{bc' - cb'}{a'b - ab'}.$$

Soluţia sistemului este deci

$$\begin{cases} x = \dfrac{bc' - cb'}{a'b - ab'} \\ y = \dfrac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \end{cases}, \quad a'b - ab' \neq 0.$$

Am regăsit soluţia obţinută prin metoda substituţiei.

Exemple. 1) $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ -3x + 9y = 6 \end{cases}$

Eliminăm pe x (termenii în x din cele două ecuaţii au coeficienţii, numere opuse) Sistemul devine

$$\begin{cases} 13y = 13 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y = 1 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}, \quad \text{de unde}$$

$$3x + 4 = 7, \qquad 3x = 3, \qquad x = 1.$$

Soluţia sistemului: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Observări. 1) Cînd eliminăm o necunoscută facem ca în ambele ecuaţii coeficienţii acestei necunoscute să reprezinte în valoare absolută cel mai mic multiplu comun al lor.

2) În practică vom căuta să eliminăm necunoscuta pentru care este mai simplu de aflat c.m.m.m.c al coeficienţilor.

a) $$\begin{cases} 2x - 8y = -6 \\ 4x - 5y = -1 \end{cases} \Bigg| -2.$$

Este mai simplu să eliminăm pe x. Înmulţim ambii membri ai primei ecuaţii cu (-2). Practic ducem o linie verticală la dreapta sistemului şi scriem în dreptul ecuaţiei numărul respectiv. Sistemul devine:

$$\begin{cases} -4x + 16y = +12 \\ 4x - 5y = -1. \end{cases}$$

Adunînd membru cu membru obţinem $11y = 11$.

Sistemul devine:

$$\begin{cases} y = 1 \\ 4x - 5y = -1 \end{cases}, \quad \text{deci} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

b) $$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 5x + 4y = 3. \end{cases}$$

Eliminăm necunoscuta y; c.m.m.m.c. al coeficienților este 20. Sistemul devine

$$\begin{cases} 8x - 20y = -4 \\ 25x + 20y = 15. \end{cases}$$

$$33x = 11, \qquad x = \frac{11}{33}, \qquad x = \frac{1}{3}.$$

Sistemul devine

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} - 5y = -1 \end{cases}$$

$$-5y = -\frac{5}{3}, \qquad y = \frac{1}{3}.$$

Soluția sistemului: $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$,

3) Metoda comparației

Sistemul $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

este echivalent cu sistemul obținut rezolvînd ambele ecuații în raport cu aceeași necunoscută.

$$\begin{cases} y = \frac{c - ax}{b} \\ y = \frac{c' - a'x}{b'}. \end{cases}$$

Egalînd cele două expresii obținute pentru necunoscuta y, obținem o ecuație care conține numai necunoscuta x (am eliminat pe y).

Sistemul devine

$$\begin{cases} y = \frac{c - ax}{b} \\ \frac{c - ax}{b} = \frac{c' - a'x}{b'}, \end{cases} \qquad b \neq 0; \quad b' \neq 0.$$

Rezolvăm ecuația a doua.

$ba'x - ab'x = bc' - cb'$.

$$x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'}$$

Scoatem valoarea lui x:

$$y = \frac{c - a \cdot \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'}}{b},$$

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}.$$

Soluția sistemului:

$$\begin{cases} x = \dfrac{bc' - cb'}{ba' - ab'} \\ \\ y = \dfrac{ca' - ac'}{ba' - ab'}, \end{cases} \qquad a'b - ab' \neq 0.$$

Exemple. 1) $\begin{cases} x - 14y = -4 \\ 3x + 2y = 32. \end{cases}$

Este mai ușor să rezolvăm în raport cu x fiecare ecuație.

$$\begin{cases} x = 14y - 4 \\ x = \dfrac{32 - 2y}{3}. \end{cases}$$

Deci:

$$\begin{cases} x = 14y - 4 \\ 14y - 4 = \dfrac{32 - 2y}{3}. \end{cases}$$ Am egalat expresiile care-l conțin pe x în funcție de y.

$$\begin{cases} x = 14y - 4 \\ 42y + 2y = 32 + 12 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = 14y - 4 \\ 44y = 44 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = 14 - 4 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Soluția sistemului: $\begin{cases} x = 10 \\ y = 1. \end{cases}$

2) $$\begin{cases} \dfrac{5x + 7y}{3x + 11} = \dfrac{13}{7} \\ \\ \dfrac{11x + 27}{7x + 5y} = \dfrac{19}{11} \end{cases}.$$

Eliminăm numitorii sau, fiecare ecuație fiind o proporție, folosim proprietatea fundamentală a proporțiilor.

Sistemul devine:

$$\begin{cases} 7(5x + 7y) = 13(3x + 11) & \text{dacă } 3x + 11 \neq 0 \\ 11(11x + 27) = 19(7x + 5y) & \text{dacă } 7x + 5y \neq 0. \end{cases}$$

Desfacem parantezele și separăm termenii.

$$\begin{cases} -4x + 49y = 143 \\ -12x - 95y = -297. \end{cases}$$

Rezolvăm ecuațiile în raport cu x:

$$\begin{cases} x = \dfrac{49y - 143}{4} \\ \\ x = \dfrac{297 - 95y}{12}. \end{cases}$$

Egalînd cele două expresii obţinem sistemul:

$$\begin{cases} x = \dfrac{49y - 143}{4} \\[2ex] \dfrac{49y - 143}{4} = \dfrac{297 - 95y}{12}; \end{cases}$$

$$3(49y - 143) = 297 - 95y,$$

$$147y + 95y = 297 + 429,$$

$$242y = 726, \qquad y = \frac{726}{242}, \quad y = 3.$$

Sistemul devine:

$$\begin{cases} x = \dfrac{49y - 143}{4} \\[2ex] y = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{147 - 143}{4} \\[2ex] y = 3. \end{cases}$$

Soluţia sistemului: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases}$

Observare. Un sistem de două ecuaţii de gradul I cu două necunoscute are aceeaşi soluţie, indiferent de metoda pe care am folosit-o pentru rezolvare.

Vom alege metoda care ne conduce la calcule mai simple.

Dacă coeficienţii uneia din necunoscute sînt egali, este preferabil să folosim metoda reducerii sau metoda comparaţiei.

Dacă o ecuaţie este rezolvată în raport cu o necunoscută, este preferabil să folosim metoda substituţiei. De exemplu, sistemul $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 15y = -43 \end{cases}$ se poate rezolva mai uşor prin substituţie.

Discuţia sistemului de două ecuaţii de gradul I cu două necunoscute

Sistemul $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

are soluţia: $\begin{cases} x = \dfrac{bc' - cb'}{ba' - ab'} \\[2ex] y = \dfrac{ca' - ac'}{ba' - ab'}. \end{cases}$

x şi y sînt date de fracţii (care au acelaşi numitor). Pentru ca fracţiile să aibă sens (sistemul să admită o soluţie şi numai una) trebuie ca numitorul să fie diferit de zero.

1) Dacă $ba' - ab' \neq 0$ sistemul este determinat, are soluţie unică.

Relaţia $ba' - ab' \neq 0$ se mai scrie $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$. Deci, dacă coeficienţii necunoscutelor nu sînt proporţionali, soluţia există şi este unică.

2) Dacă $ba' - ab' = 0$ sau $\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$ (coeficienții necunoscutelor sînt proporționali), există două cazuri:

1° $bc' - cb' \neq 0$

$(ca' - ac' \neq 0)$; $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$. Sistemul de ecuații nu are soluție.

2° $bc' - cb' = 0$. Sistemul are o infinitate de soluții; cele două ecuații se reduc $(ca' - ac' = 0)$ la una singură.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Exemple

1) $\begin{cases}3x + 5y = 8\\6x + 10y = 16\end{cases}$ sau în general $\begin{cases}ax + by = c\\k\,ax + kby = kc.\end{cases}$

Ecuațiile se reduc la o singură ecuație cu două necunoscute dacă împărțim ambii membri ai ecuației a doua a celor două sisteme respectiv cu 2 sau k. Sistemul este nedeterminat; are o infinitate de soluții.

2) $\begin{cases}3x + 5y = 8\\6x + 10y = 10\end{cases}$ sau în general $\begin{cases}ax + by = c\\kax + kby = c' \ (c' \neq ck).\end{cases}$

Sistemele devin

1') $\begin{cases}3x + 5y = 8\\3x + 5y = 5\end{cases}$; $\begin{cases}ax + by = c\\ax + by = \frac{c'}{k}\left(\frac{c'}{k} \neq c\right).\end{cases}$

Sistemele sînt imposibile căci aceeași expresie $3x + 5y$ respectiv $ax + by$ nu poate să ia două valori diferite 8 și 5 respectiv c și $\frac{c'}{k} \neq c$. Sistemul nu are soluție.

Dacă încercăm să rezolvăm sistemul (1) obținem:

$$\begin{cases}3x + 5y = 8\\-3x - 5y = -8\end{cases}$$

Ecuațiile sînt verificate pentru orice valori date necunoscutelor x și y.
Dacă încercăm să rezolvăm sistemul (2) obținem,

$$2')\quad \begin{cases}3x + 5y = 8\\-3x - 5y = -5.\end{cases}$$

$0 \cdot x + 0 \cdot y = 3$; ceea ce nu este posibil pentru că 0 nu poate fi egal cu 3.

Concluzie. Un sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute este determinat (are o soluție și numai una) dacă coeficienții necunoscutelor din cele două ecuații nu sînt proporționali; este nedeterminat (are o infinitate de soluții) dacă coeficienții necunoscutelor și termenii liberi sînt proporționali $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$; este

imposibil dacă coeficienţii necunoscutelor sînt proporţionali dar termenii liberi formează un raport diferit de raportul coeficienţilor uneia din necunoscute $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}\right)$.

Sistemele cu ecuaţii literale se rezolvă prin aceleaşi metode ca şi cele cu coeficienţi numerici.

Exemple.

1) $$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ x + y = 2a \end{cases} \Bigg| \, b$$

Sistemul are forma normală.

Eliminăm pe y

$$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + by = 2ab. \end{cases}$$ Adunăm membru cu membru ecuaţiile.

$$x(a + b) = a^2 + b^2 + 2ab,$$

deci $x = \dfrac{a^2 + b^2 + 2ab}{a + b}$. Simplificînd fracţia cu $a + b \neq 0$,

$$x = (a + b)$$

Sistemul (1) se înlocuieşte cu sistemul echivalent

$$\begin{cases} x = a + b \\ x + y = 2a \end{cases} \qquad y = 2a - x,$$

$$y = 2a - a - b, \qquad y = a - b.$$

Soluţia sistemului:

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b. \end{cases}$$

Verificare.

Prima ecuaţie: I) $a(a + b) - b(a - b) = a^2 + ab - ab + b^2$; II) $a^2 + b^2$.

A doua ecuaţie: I) $a + b + a - b = 2a$; II) $2a$.

2) $$\begin{cases} \dfrac{x}{a + b} + \dfrac{y}{a - b} = \dfrac{1}{a - b} \\[2ex] \dfrac{x}{a + b} - \dfrac{y}{a - b} = \dfrac{1}{a + b} \end{cases}$$ sau $$\begin{cases} (a - b)x + (a + b)y = a + b \\ (a - b)x - (a + b)y = a - b. \end{cases}$$

Sistemul (2) are forma normală. Adunînd şi scăzînd membru cu membru cele două ecuaţii obţinem:

$$x = \frac{a}{a - b}; \qquad y = \frac{b}{a + b}.$$

Pentru ca ecuaţia să aibă sens trebuie ca $a \neq b$ şi $a \neq -b$.

Observare. Putem rezolva sistemul 2) fără să aducem la acelaşi numitor căci coeficienţii lui y $\left(\frac{1}{a-b}\right.$ şi $\left.-\frac{1}{a-b}\right)$ sînt numere opuse. Adunăm membru cu membru cele două ecuaţii.

$$\frac{2x}{a+b} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}; \quad \frac{2x}{a+b} = \frac{a+b+a-b}{(a-b)(a+b)},$$

de unde:

$$\boxed{x = \frac{a}{a-b}}.$$

Scăzînd cele două ecuaţii membru cu membru obţinem:

$$\frac{2y}{a-b} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}; \quad \frac{2y}{a-b} = \frac{2b}{(a-b)(a+b)} \text{ deci } y = \frac{b}{a+b}.$$

Soluţia sistemului: $\begin{cases} x = \dfrac{a}{a-b} \\ y = \dfrac{b}{a+b} \end{cases}$

Verificare.

Prima ecuaţie: membrul I este $\frac{a}{(a-b)(a+b)} + \frac{b}{(a-b)(a+b)} = \frac{1}{a-b}$;

membrul II este $\frac{1}{a-b}$.

A doua ecuaţie: membrul I este $\frac{a}{(a-b)(a+b)} - \frac{b}{(a-b)(a+b)} = \frac{1}{a+b}$;

membrul II este: $\frac{1}{a+b}$.

3) $\begin{cases} a(x+y) = a + b(x-y) \\ (a^2-b^2)x + b^2y = a^2(1-y) \end{cases}$ necunoscutele sînt x şi y.

Aducem ecuaţiile la forma normală, desfacem parantezele (dacă e cazul) şi separăm termenii.

$$\begin{cases} ax + ay - bx + by = a \\ (a^2-b^2)x + b^2y + a^2y = a^2. \end{cases}$$

Strîngem termenii în x şi y.

$$\begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = a \\ (a^2-b^2)x + (a^2+b^2)y = a^2 \end{cases} \Bigg| -(a+b).$$

Eliminăm pe x. Multiplul comun al coeficienţilor lui x este a^2-b^2.

$$\begin{cases} -(a^2-b^2)x - (a+b)^2y = -a^2 - ab \\ (a^2-b^2)x + (a^2+b^2)y = a^2 \end{cases}$$

$$(a^2 + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab)y = -ab$$

$$-2aby = -ab, \quad y = \frac{1}{2}$$

Sistemul devine $\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ (a - b)\, x + (a + b) y = a \end{cases}$

de unde:

$$(a - b)x = a - \frac{1}{2}(a + b); \quad (a - b)x = \frac{a - b}{2}$$

Soluția sistemului: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Verificare. Prima ecuație: membrul I este $a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = a;$

membrul II este $a + b\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = a.$

A doua ecuație: membrul I este $(a^2 - b^2)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b^2 = \frac{a^2}{2};$

membrul II este $a^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a^2.$

Ecuații și sisteme care se rezolvă prin procedee speciale

Unele sisteme pot fi rezolvate mai ușor folosind anumite procedee de calcul după specificul exercițiului

Exemple.

1) Sistemul $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

nu-l putem rezolva în această etapă de studiu prin procedeul obișnuit căci, prin eliminarea numitorului, obținem cîte un termen de gradul II în xy.

Vom introduce două necunoscute ajutătoare notînd $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ și vom rezolva sistemul în u și v obținut.

$$\begin{cases} u + v = \frac{7}{12} \\ 2u - 3v = -\frac{1}{2} \end{cases} \Bigg|\, 3 \quad ; \quad \begin{cases} 3u + 3v = \frac{7}{4} \\ 2u - 3v = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$5u = \frac{5}{4}, \quad u = \frac{1}{4}.$$

Sistemul devine:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{4} \\ u + v = \frac{7}{12} \text{ de unde } v = \frac{7}{12} - \frac{1}{4},\ v = \frac{4}{12},\ v = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Calculăm necunoscutele inițiale.

$$\frac{1}{x} = u, \quad x = \frac{1}{u}, \quad x = 4.$$

$$\frac{1}{y} = v, \quad y = \frac{1}{v}, \quad y = 3.$$

$x = 4$ și $y = 3$ verifică ecuația inițială.

2) Să se rezolve ecuația

$$\frac{a(x - b^2) + b(a^2 - x)}{a(x - b^2) - b(a^2 - x)} = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}.$$

Putem efectua mai ușor calculele dacă observăm că ecuația este de forma $\frac{A + B}{A - B} = \frac{C}{D}$ deci o proporție și putem aplica proprietățile scriind proporția derivată

$$\frac{A + B + A - B}{A + B - A + B} = \frac{C + D}{C - D}; \qquad \frac{2A}{2B} = \frac{C + D}{C - D}.$$

În cazul nostru ecuația devine

$$\frac{a(x - b^2)}{b(a^2 - x)} = \frac{2a^3}{-2b^3}, \text{ sau împărțind prin } \frac{2a}{2b} \text{ în ambii membri } \left(\frac{a}{b} \neq 0\right),$$

$$\frac{x - b^2}{a^2 - x} = -\frac{a^2}{b^2} \text{ de unde (pentru } x \neq a^2)$$

$$(b^2 - a^2)x = b^4 - a^4,\ x = \frac{b^4 - a^4}{b^2 - a^2},\ x = \frac{(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} \text{ (presupunem } b^2 - a^2 \neq 0),$$

$$x = a^2 + b^2.$$

Verificare. Membrul I: $\frac{a \cdot a^2 - b \cdot b^2}{a \cdot a^2 - b(-b^2)} = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$; membrul II: $\frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$.

3) $$\begin{cases} \frac{2}{x + y} + \frac{7}{x - y} = \frac{5}{3} \\ \frac{4}{x + y} - \frac{9}{x - y} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Folosim procedeul indicat la sistemul 1). Introducem necunoscutele ajutătoare $\frac{1}{x + y} = u$, $\frac{1}{x - y} = v$ $(x + y \neq 0,\ x - y \neq 0)$.

Sistemul în u și v va fi:

$$\begin{cases} 2u + 7v = \frac{5}{3} \\ 4u - 9v = -\frac{1}{2} \end{cases} \Bigg| -2 \qquad \begin{cases} -4u - 14v = -\frac{10}{3} \\ 4u - 9v = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-23v = -\frac{23}{6}, \quad v = \frac{1}{6}$$

Sistemul devine

$$\begin{cases} 2u + 7v = \frac{5}{3} \\ v = \frac{1}{6}, \end{cases} \quad 2u = \frac{5}{3} - \frac{7}{6}, \quad 2u = \frac{3}{6}, \quad u = \frac{1}{4}.$$

Soluția sistemului ajutător $\begin{cases} u = \frac{1}{4} \\ v = \frac{1}{6}. \end{cases}$

Sistemul dat va avea aceeași soluție ca sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$2x = 10 \qquad x = 5$$

$$y = 4 - 5 \qquad y = -1.$$

Soluția: $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1. \end{cases}$

Sisteme de trei ecuații cu trei necunoscute

Pentru a rezolva un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute căutăm să eliminăm — prin una din metodele cunoscute de la sistemul de două ecuații — una din necunoscute adică să formăm un sistem echivalent în care două ecuații să conțină numai două din necunoscute (aceleași).

Exemple

1) $$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 28 \\ 3x + 2y - 5z = 16 \\ 2x + y - 3z = 10 \end{cases} \Bigg| 3 \Bigg| -2 \qquad \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 28 \\ 6x + 3y - 9z = 30 \end{cases}$$

$$10x - 7z = 58$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 16 \\ -4x - 2y + 6z = -20 \end{cases}$$

$$-x + z = -4.$$

Eliminăm de exemplu pe y din prima şi ultima ecuaţie, apoi din ultimele două. Obţinem două ecuaţii în x şi z care împreună cu una din ecuaţiile sistemului dat formează un sistem echivalent.

$$\begin{cases}10x - 7z = 58 \\ -x + z = -4 \\ 2x + y - 3z = 10.\end{cases} \Big| 7$$

Din primele două ecuaţii îl eliminăm pe z şi obţinem:

$$3x = 30, \quad x = 10 \quad \text{apoi} \quad z = -4 + 10, \quad z = 6.$$

$$y = 10 + 3z - 2x, \quad y = 10 + 18 - 20, \quad y = 8.$$

Soluţia sistemului: $\begin{cases}x = 10 \\ y = 8 \\ z = 6.\end{cases}$

Acelaşi sistem se putea rezolva prin metoda substituţiei. De exemplu, scoatem valoarea lui y din a treia ecuaţie şi o înlocuim în primele două. Sistemul devine:

$$\begin{cases}y = 10 + 3z - 2x \\ 4x - 30 - 9z + 6x + 2z = 28 \\ 3x + 20 + 6z - 4x - 5z = 16\end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases}y = 10 + 3z - 2x \\ 10x - 7z = 58 \\ -x + z = -4.\end{cases}$$

Acelaşi sistem la care am ajuns şi prin prima metodă.

2) $$\begin{cases}2x + 5y + 4z = 17 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 3y - 2z = 2\end{cases} \Big| 4 \Big| -2$$

Eliminăm pe z din primele două ecuaţii apoi din ultimele două.
Obţinem sistemul echivalent:

$$\begin{cases}14x + 13y = 25 \\ -x - y = -2 \\ 3x + 2y - z = 2\end{cases} \Big| 14 \Big| 13 \qquad \begin{aligned}(13 - 14)y &= 25 - 28; \quad & y &= +3; \\ (14 - 13)x &= 25 - 26, \quad & x &= -1.\end{aligned}$$

Calculăm z din ultima ecuaţie

$$z = 3x + 2y - 2; \quad z = -3 + 6 - 2; \quad z = 1.$$

Soluţia: $\begin{cases}x = -1 \\ y = 3. \\ z = 1\end{cases}$

Folosind metoda substituţiei, obţinem acelaşi rezultat:

$$\begin{cases}z = 3x + 2y - 2 \\ 2x + 5y + 12x + 8y - 8 = 17 \\ 5x + 3y - 6x - 4y + 4 = 2\end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases}z = 3x + 2y - 2 \\ 14x + 13y = 25 \\ -x - y = -2.\end{cases}$$

3) $$\begin{cases}x + y = 5 \\ y + z = 7 \\ z + x = 6\end{cases}$$

Sistemul se rezolvă uşor prin metodele cunoscute. Putem folosi însă şi un alt procedeu. Observăm că adunînd membru cu membru, în partea întîi, obţinem: $2(x+y+z)$, deci se poate găsi valoarea sumei. $x+y+z$. Scăzînd succesiv suma a cîte două necunoscute, se determină x, y, z.

$$2(x+y+z)=18, \qquad x+y+z=9$$
$$z=9-5,\ z=4$$
$$x=9-7,\ x=2$$
$$y=9-6,\ y=3.$$

Verificarea se face imediat în sistemul dat.

4) $$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{4} \end{cases} \qquad (x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0).$$

Procedînd ca în exemplul precedent obţinem

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\overset{2)}{\frac{5}{6}}+\frac{7}{12}+\overset{3)}{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{12} \quad \text{deci} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{z}=\dfrac{13}{12}-\dfrac{10}{12} \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{13}{12}-\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{13}{12}-\dfrac{9}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4};\ z=4 \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2};\ x=2 \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3};\ y=3 \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{12}{5} \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{18}{5} \\ \dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{36}{13} \end{cases} \qquad (x+y\neq 0;\ y+z\neq 0;\ x+z\neq 0).$$

Dacă eliminăm numitorii ajungem la un sistem care conţine termeni de gradul II (xy, yz, xz).

Putem aduce sistemul la o formă cunoscută considerînd în fiecare proporţie rapoartele inversate

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{5}{18} \\ \dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{13}{36} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{18} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{13}{36} \end{cases}.$$

Folosim procedeul din exemplul precedent

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{15+10+13}{36}$$

$$\text{Din } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{19}{36}.$$

prin scăderi succesive obținem sistemul:

$$\begin{cases}\frac{1}{z}=\frac{19}{36}-\frac{15}{36}\\ \frac{1}{x}=\frac{19-10}{36}\\ \frac{1}{y}=\frac{19-13}{36}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{z}=\frac{4}{36}; & \frac{1}{z}=\frac{1}{9} \text{ deci } z=9\\ \frac{1}{x}=\frac{9}{36}; & \frac{1}{x}=\frac{1}{4} \text{ deci } x=4\\ \frac{1}{y}=\frac{6}{36}; & \frac{1}{y}=\frac{1}{6} \text{ deci } y=6.\end{cases}$$

Soluția sistemului. $\begin{cases}x=4\\ y=6.\\ z=9\end{cases}$

III. Ecuația de gradul II

Forma canonică a ecuației de gradul II cu o necunoscută este: $ax^2+bx+c=0$.
Pentru ca ecuația să fie de gradul II trebuie ca $a\neq 0$.
Forme incomplete ale ecuației de gradul II.

1°) $b=0,\ c\neq 0,\ ax^2+c=0,$

2°) $c=0,\ b\neq 0,\ ax^2+bx=0,$

3°) $c=0,\ b=0,\ ax^2=0.$

A rezolva ecuația de gradul al doilea înseamnă a găsi valorile necunoscutei care verifică ecuația (soluțiile sau rădăcinile ecuației).

Rezolvarea ecuației $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$

1) *Cazuri particulare*

1) $ax^2+c=0,\quad ax^2=-c,\quad x^2=-\frac{c}{a}.$

Căutăm soluțiile în mulțimea numerelor reale $\left(-\frac{c}{a}\geqslant 0\right)$. $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (Pătratele a două numere reale opuse sînt egale). Ecuația are soluție numai dacă $-\frac{c}{a}\geqslant 0$.

Dacă ecuația are forma $a^2x^2-b^2=0$, putem descompune membrul întîi în factori $(ax+b)(ax-b)=0$, de unde: $ax+b=0,\ x_1=-\frac{b}{a}$ sau $ax-b=0,\ x_2=\frac{b}{a}$.

Exemple

a) $9x^2 - 16 = 0$. Descompunem membrul întîi

$(3x - 4)\ (3x + 4) = 0$. Un produs este nul dacă și numai dacă unul din factori este nul deci

$3x - 4 = 0$ sau $3x + 4 = 0$, care ne dau soluțiile

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Verificare. } 9\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 16 = 16 - 16 = 0,$$

$$9\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 16 = 16 - 16 = 0.$$

b) $9x^2 - 7 = 0$,

$(3x - \sqrt{7})\ (3x + \sqrt{7}) = 0$; $3x - \sqrt{7} = 0$ și $3x + \sqrt{7} = 0$ $x = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$.

c) $4x^2 + 9 = 0$ nu are soluție căci $4x^2$ este pozitiv pentru orice valoare reală a lui x și o sumă de două numere pozitive nu poate fi nulă.

d) $-16x^2 + 25 = 0$.

$(5 - 4x)\ (5 + 4x) = 0$ de unde $5 - 4x = 0$ sau $5 + 4x = 0$.

$$x_1 = \frac{5}{4}; \quad x_2 = -\frac{5}{4}.$$

2) $ax^2 + bx = 0$. Descompunem membrul întîi.

$x(ax + b) = 0$. Anulăm fiecare factor.

$$x = 0, \quad ax + b = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Exemple

a) $5x^2 - 2x = 0$; $x(5x - 2) = 0$.

$$x = 0, \quad 5x - 2 = 0.$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{}{5}.$$

b) $3x^2 + 7x = 0$; $x(3x + 7) = 0$

$$x = 0, \quad 3x + 7 = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{7}{3}.$$

3) $ax^2 = 0$ se poate scrie $a \cdot x \cdot x = 0$ $(a \neq 0)$

deci $x = 0$ şi $x = 0$ avem două rădăcini (o rădăcină dublă) egale cu zero.

$$x_1 = x_2 = 0$$

4) $(ax + b)^2 = 0$ are rădăcina dublă

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Exemple

a) $4x^2 - 4x + 1 = 0.$

Membrul întîi este un pătrat perfect: $(2x - 1)^2 = 0$ deci $(2x - 1)(2x - 1) = 0.$

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$$

b) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ sau

$(3x + 2)^2 = 0$ deci $(3x + 2)(3x + 2) = 0.$

$$x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}.$$

5) $$(ax + b)^2 = c^2$$

sau $(ax + b)^2 - c^2 = 0$ Descompunem în factori

$(ax + b + c)(ax + b - c) = 0$ de unde

$ax + b + c = 0$ sau $ax + b - c = 0.$

$$x_1 = -\frac{b + c}{a}, \quad x_2 = \frac{c - b}{a}.$$

Ecuaţia de forma $ax^2 + bx + c = 0.$ $a \neq 0,$ $b \neq 0,$ $c \neq 0.$

Vom aduce ecuaţia la forma precedentă căutînd să scoatem în evidenţă un binom în x la pătrat. Împărţim ambii membri ai ecuaţiei cu a (pentru a obţine termenul în x^2 un pătrat perfect)

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Formăm binomul care prin ridicare la pătrat să cuprindă primii termeni $\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right).$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}.$$

Ecuaţia devine: $\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) = 0$

de unde:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ sau}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ cu condiţia } b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

Dacă $b^2 - 4ac > 0$, rădăcinile ecuației

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ sînt reale și distincte.}$$

Dacă $b^2 - 4ac = 0$, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ (reale confundate).

Dacă $b^2 - 4ac < 0$, ecuația nu are rădăcini reale.

Exemple

1) $3x^2 - 10x + 8 = 0$. Împărțim cu 3:

$x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{8}{3} = 0$. Separăm un pătrat perfect:

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + \frac{8}{3} = 0; \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = 0;$$

$$\left(x - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0.$$

Deci $x = \frac{5}{3} \pm \frac{1}{3}$ de unde

$$x_1 = \frac{4}{3}, \ x_2 = 2.$$

Dacă aplicăm formula găsită, $a = 3$, $b = -10$, $c = 8$,

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{6}, \quad x = \frac{10 \pm 2}{6} \text{ deci}$$

$$x_1 = \frac{4}{3}, \ x_2 = 2.$$

Verificarea se face în ecuația dată.

2) $$\frac{20 + x}{2x - 2} - \frac{9x^2 + x + 2}{6x^2 - 6} = \frac{5 - 3x}{x + 1} - \frac{10 - 4x}{3x + 3}.$$

Pentru ca fracțiile să aibă sens trebuie ca $x^2 - 1 \neq 0$ deci $x \neq \pm 1$.

Aducem ecuația la forma normală. Eliminăm numitorii înmulțind prin c.m.m.m.c. al lor în ambii membri ai ecuației. Numitorul comun

$2x - 2 = 2(x - 1)$	$3x + 3$
$6x^2 - 6 = 2 \cdot 3(x - 1)\ (x + 1)$	1
$x + 1 = x + 1$	$6x - 6$
$3x + 3 = 3(x + 1)$	$2x - 2$

c.m.m.m.c. $= 2 \cdot 3(x - 1)\ (x + 1) = 6(x^2 - 1)$.

Eliminăm numitorul înmulțind ambii membri ai ecuației cu $6(x^2 - 1)$.

$$(3x + 3)\ (20 + x) - (9x^2 + x + 2) = (6x - 6)\ (5 - 3x) - (10 - 4x)\ (2x - 2).$$

Desfacem parantezele.

$$60x+60+3x^2+3x-9x^2-x-2=30x-30-18x^2+18x-20x+8x^2+20-8x.$$

Strîngem termenii asemenea în fiecare membru (pentru a uşura calculele).

$$-6x^2+62x+58=-10x^2+20x-10.$$

Separăm termenii şi strîngem termenii asemenea în acelaşi timp. $4x^2+42x+68=0$. Rezolvăm ecuaţia fără ajutorul formulei. Separăm un pătrat perfect

$$\left(2x+\frac{21}{2}\right)^2-\frac{441}{4}+68=0;$$

$$\left(2x+\frac{21}{2}\right)^2-\frac{169}{4}=0, \qquad \left(2x+\frac{21}{2}\right)^2-\left(\frac{13}{2}\right)^2=0.$$

Descompunem în factori:

$$\left(2x+\frac{21}{2}+\frac{13}{2}\right)\left(2x+\frac{21}{2}-\frac{13}{2}\right)=0$$

$$2x+17=0, \qquad 2x+4=0$$

$$x_1=-\frac{17}{2}, \qquad x_2=-2.$$

Rezolvăm aceeaşi ecuaţie cu ajutorul formulei.

$4x^2+42x+68=0.$ Împărţim ambii membri cu 2

$2x^2+21x+34=0.$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad a=2, \quad b=21, \quad c=34.$$

$$x=\frac{-21\pm\sqrt{441-272}}{2}, \qquad x=\frac{-21\pm\sqrt{169}}{4},$$

$$x=\frac{-21\pm13}{4}; \qquad x_1=\frac{-21+13}{4}; \qquad x_2=\frac{-21-13}{4}$$

$$x_1=-2, \qquad x_2=-\frac{17}{2}.$$

Verificarea se face în ecuaţia dată.

Pentru $x=-2$ membrul I este $\dfrac{18}{-6}-\dfrac{36-2+2}{18}=-3-2=-5;$

membrul II este $\dfrac{11}{-1}-\dfrac{10+8}{-3}=-11+6=-5.$

Pentru $x=-\dfrac{17}{2}$ membrul I este $\dfrac{20-\dfrac{17}{2}}{-17-2}-\dfrac{9\cdot\dfrac{289}{4}-\dfrac{17}{2}+2}{\dfrac{6\cdot19\cdot15}{4}}=-\dfrac{19}{9};$

membrul II este $\dfrac{5+\dfrac{3\cdot17}{2}}{-\dfrac{15}{2}}-\dfrac{10+34}{3\cdot\left(-\dfrac{15}{2}\right)}=-\dfrac{19}{9}.$

Observare. În cazul b număr par $b = 2b'$. Formula de rezolvare a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ devine

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a}$$

Dînd pe 2 factor comun,

$$x = \frac{2(-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac})}{2a} \left(\text{în care } b' \text{ este } \frac{b}{2}\right),$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Exemplu. $5x^2 - 4x - 1 = 0.$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 5}}{5}, \qquad x = \frac{2 \pm 3}{5}.$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{5}.$$

Dacă $a = 1$ și b număr par $b = 2b'$, formula devine:

$$x = -b' \pm \sqrt{b'^2 - c}.$$

Exemplu. $x^2 - 6x + 8 = 0.$

$$x = 3 \pm \sqrt{9 - 8}, \qquad x = 3 \pm 1.$$

$$x_1 = 4, \qquad x_2 = 2.$$

VIII
Inegalități

Două numere reale a și b pot fi:

1) egale, $a = b$,

2) diferite, $a \neq b$, cînd $a > b$ sau $b > a$.

Două numere sau două expresii algebrice legate prin semnele $>$ sau $<$ formează o inegalitate. Cele două expresii se numesc: partea stîngă sau membrul întîi al inegalității, și partea dreaptă sau membrul doi al inegalității. Semnele $\geqslant$ (mai mare sau cel puțin egal) și $\leqslant$ (mai mic sau cel mult egal) sînt și ele des folosite.

Exemple. $-2 > -3$; $2 < 4$, $a^2 - 2ab + b^2 > 0$, $a \neq b$.

Inegalitățile adevărate pentru orice valori date literelor se numesc inegalități propriu-zise. De exemplu: $a^2 + b^2 \geqslant 0$ (o sumă de două pătrate de numere reale este totdeauna pozitivă sau zero; va fi egală cu zero numai în cazul $a = b = 0$). $(a - b)^2 \geqslant 0$ (un pătrat perfect al unui număr real este totdeauna pozitiv sau zero dacă $a = b$).

O inegalitate de forma $E_1(x) < E_2(x)$ sau $E_1(x) \leqslant E_2(x)$ care nu se verifică pentru toate valorile date lui x este o *inecuație cu o necunoscută*.

A rezolva o inecuație înseamnă a determina mulțimea valorilor pentru care inecuația este verificată.

Rezolvarea unei inecuații cu o necunoscută se reduce la una din formele: $x > a$, $x < a$; $x \geqslant a$; $x \leqslant a$.

Dacă reprezentăm numărul a pe axa xx'a numerelor reale prin punctul A atunci

1) $x > a$ este satisfăcută de toate numerele reale reprezentate la dreapta punctului A deci de mulțimea numerelor corespunzătoare punctelor semidreptei Ax (fără punctul A) — semiaxă deschisă la stînga (fig. 9).

2) $x < a$ este satisfăcută de toate numerele reale corespunzătoare punctelor semidreptei Ax' fără punctul A) — semidreaptă deschisă la dreapta (fig. 8).

3) $x \geqslant a$ este satisfăcută de toate numerele reale corespunzătoare punctelor semidreptei Ax (inclusiv A) — semidreaptă închisă la stînga (fig. 10,a).

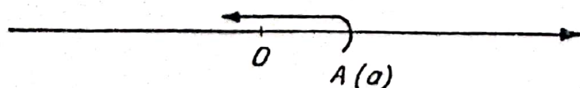


Fig. 8

Fig. 9

4) $x \leqslant a$ este satisfăcută de toate numerele reale corespunzătoare punctelor semidreptei Ax' (inclusiv A) — semidreaptă închisă la dreapta (fig. 10, *b*).

Mulţimea punctelor semidreptei deschise Ax se notează $(a, +\infty)$. Dacă $x > a$ atunci $x \in (a, +\infty)$.

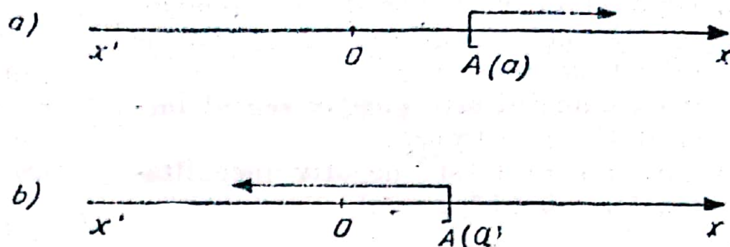


Fig. 10

Mulţimea punctelor semidreptei deschise Ax' se notează $(-\infty, a)$. Dacă $x < a$ atunci $x \in (-\infty, a)$.

Mulţimea punctelor semidreptei închise Ax se notează $[a, +\infty)$. Dacă $x \geqslant a$ atunci $x \in [a, +\infty)$.

Mulţimea punctelor semidreptei închise Ax' se notează $(-\infty, a]$. Dacă $x \leqslant a$ atunci $x \in (-\infty, a]$.

Semidreptele $(a, +\infty)$ sau $(-\infty, a)$ se mai numesc intervale deschise nemărginite la dreapta respectiv la stînga.

Semidreptele $[a, +\infty)$ sau $(-\infty, a]$ sînt intervale închise respectiv la stînga sau la dreapta.

Prin interval închis $[a, b]$ vom înţelege mulţimea punctelor cuprinse între punctele A şi B inclusiv punctele A şi B corespunzătoare numerelor a respectiv b.

$$x \in [a, b] \text{ înseamnă } a \leqslant x \leqslant b$$

x cuprins între a şi b putînd lua şi valorile a şi b

$x \in (a, b)$ înseamnă $a < x < b$ adică x este cuprins între a şi b fără a lua valorile a sau b.

Exemple. 1) $x \in (2, 5)$ înseamnă $2 < x < 5$;
x este cuprins între 2 şi 5 (mai mare decît 2 şi mai mic decît 5)

2) $x \in [3, 7)$ înseamnă $3 \leqslant x < 7$;
x este mai mare sau cel puţin egal cu 3 şi mai mic decît 7.

3) $x \in (-5, -1]$ înseamnă $-5 < x \leqslant -1$;
x mai mare decît -5 şi mai mic sau cel mult egal cu -1.

4) $x \in [-2, 1]$ înseamnă $-2 \leqslant x \leqslant 1$;
x mai mare sau cel puţin egal cu -2 şi mai mic sau cel mult egal cu 1.

Numim inecuaţii echivalente inecuaţiile satisfăcute de aceeaşi mulţime de valori.

Proprietăţile inecuaţiilor

Inegalităţi numerice

1. Dacă adunăm (scădem) acelaşi număr în ambele părţi ale unei inegalităţi, inegalitatea îşi păstrează sensul.

Exemplu. $5 > -1$

$5 + 1 > -1 + 1$; $6 > 0$
$5 - 2 > -1 - 2$; $3 > -3$.

Inecuaţii

1. Dacă adunăm (scădem) în ambii membri ai unei inecuaţii acelaşi număr obţinem o inecuaţie echivalentă.

Consecinţă. Într-o inecuaţie putem trece un termen dintr-o parte în alta a inecuaţiei cu semnul schimbat şi obţinem o inecuaţie echivalentă.

2. Dacă înmulţim (împărţim) ambii membri ai unei inegalităţi cu un număr diferit de zero, atunci:
1) dacă numărul este pozitiv sensul inegalităţii se păstrează:
2) dacă numărul este negativ inegalitatea îşi schimbă sensul

Exemple. Din $14>12$ obţinem:

$14\cdot 2>12\cdot 2$; $14 : 2>12 : 2$; $7>6$;
$14\cdot(-2)<12\cdot(-2)$; $-28<-24$;
$14 : (-2)<12 : (-2)$; $-7<-6$.

2. Dacă înmulţim (împărţim) ambii membri ai unei inecuaţii cu acelaşi număr diferit de zero atunci obţinem o inecuaţie echivalentă de acelaşi sens dacă numărul este pozitiv şi de sens contrar dacă numărul este negativ.

Exemple. Din $x>3$ obţinem inecuaţiile:

$$2x>6;\ -2x<-6;$$

$$\frac{x}{2}>\frac{3}{2};\ -\frac{x}{2}<-\frac{3}{2}.$$

care sînt inecuaţii echivalente.

Consecinţă.

Într-o inecuaţie de forma $ax>b$ dacă împărţim ambii membri cu a atunci:

$$x>\frac{b}{a} \text{ dacă } a>0;\quad x<\frac{b}{a} \text{ dacă } a<0$$

De exemplu:

1) dacă $5x>10$, atunci $x>2$

2) dacă $-5x>10$, atunci $x<-2$.

3. Dacă adunăm parte cu parte două inegalităţi de acelaşi sens obţinem tot o inegalitate de acelaşi sens.

Exemplu.

$$\begin{array}{r} 3>2 \\ -4>-5 \\ \hline -1>-3. \end{array}$$

Consecinţă. Dacă dintr-o inegalitate de un anumit sens scădem o inegalitate de sens contrar obţinem o inegalitate de acelaşi sens cu prima

Exemple.

1) $\begin{array}{r} 5>3; \\ -2<1 \\ \hline 7>2 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} -5<-3; \\ 2>1 \\ \hline -7<-4 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -1<3 \\ -5>-7 \\ \hline 4<10. \end{array}$

Rezolvarea inecuaţiilor de gradul I cu o necunoscută se bazează pe proprietăţile inecuaţiilor echivalente.

Exemple.

1) $6x+10>34$
$6x>34-10$ — Trecem termenii liberi în membrul doi.
$6x>24$ — Împărţim ambii membri ai inecuaţiei cu $6>0$ deci
$x>4$.

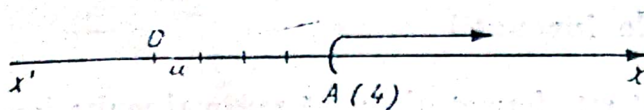


Fig. 11

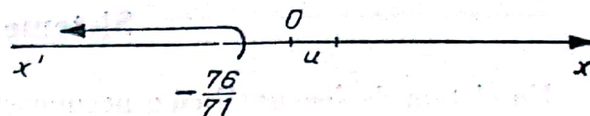


Fig. 12

sau (fig. 11) $x \in (4, +\infty)$.

$$2)\ \overset{2)}{\frac{3-2x}{5}} + \overset{10)}{8} < \overset{5)}{\frac{5x+2}{2}} - \overset{10)}{10x}.$$ Aducem la acelaşi numitor (10).

$$\frac{6-4x+80}{10} < \frac{25x+10-100x}{10}.$$ Înmulţim cu $10 (10 > 0)$ în ambii membri.

$$6-4x+80 < 25x+10-100x.$$ Separăm termenii care conţin necunoscuta în membrul I.

$$-4x-25x+100x < 10-6-80.$$ Strîngem termenii asemenea.

$$71x < -76.$$ Împărţim în ambii membri cu $71 (71 > 0)$.

$$x < -\frac{76}{71} \text{ sau}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{76}{71}\right) \text{ (fig. 12).}$$

3) $2x + 1 \geqslant 5x - 9$.

$$2x - 5x \leqslant -9 - 1.$$ Separăm termenii care conţin necunoscuta.

$$-3x \geqslant -10.$$ Împărţim cu $-3 (-3 < 0)$ şi schimbăm sensul inegalităţii.

$$x \leqslant \frac{10}{3} \text{ sau}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{10}{3}\right] \text{ (fig. 13).}$$

$$4)\ 1 - \overset{3)}{\frac{5-x}{7}} \leqslant \overset{21)}{3x} - \frac{2+x}{21}.$$ Aducem la acelaşi numitor (21).

$$\frac{21-15+3x}{21} \leqslant \frac{63x-2-x}{21}.$$ Înmulţim cu $21\ (21 > 0)$.

$$21 - 15 + 3x \leqslant 63x - 2 - x.$$

$$3x - 63x + x \leqslant -2 - 21 + 15.$$ Separăm termenii care conţin necunoscuta.

$$-59x \leqslant -8.$$ Strîngem termenii asemenea.

$$x \geqslant \frac{8}{59} \text{ sau}$$ Împărţim ambii membri cu $-59 (-59 < 0)$ şi schimbăm sensul inegalităţii.

$$x \in \left[\frac{8}{59}, +\infty\right) \text{ (fig. 14).}$$

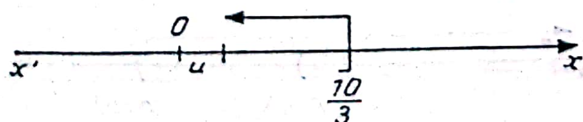


Fig. 13

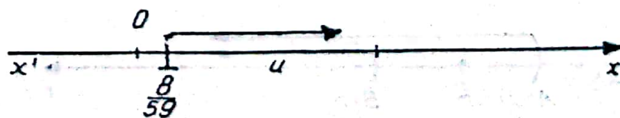


Fig. 14

Sisteme de inecuații

Un sistem de inecuații cu o necunoscută este format din două sau mai multe inecuații cu aceeași necunoscută.

Pentru a rezolva un sistem de inecuații rezolvăm inecuațiile sistemului în mod succesiv. Soluția sistemului este dată de mulțimea elementelor comune mulțimilor soluțiilor inecuațiilor care formează sistemul adică de intersecția acestor mulțimi.

La rezolvarea unui sistem de două inecuații cu o necunoscută se poate ajunge numai la una din următoarele cazuri:

$$1)\quad \begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases} \quad \text{și } a < b \text{ (fig. 15).}$$

Dacă x trebuie să fie mai mare decît două numere va fi mai mare decît cel mai mare dintre aceste numere (se vede și pe figură). Deci soluția $x > b$. Această mulțime este mulțimea dată de intersecția intervalelor $(a, +\infty) \cap (b + \infty)$;

$$(a, +\infty) \cap (b, +\infty) = (b, +\infty) \text{ dacă } a < b; \; x \in (b, +\infty).$$

$$2)\quad \begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases} \quad \text{și } a < b \text{ (fig. 16).}$$

Deci $x \in (-\infty, a) \cap (-\infty, b) = (-\infty, a)$

sau $x < a$.

Dacă x trebuie să fie mai mic decît două numere date el este mai mic decît cel mai mic din cele două numere.

$$3)\quad \begin{cases} x < b \\ x > a \end{cases} \quad \text{și } a < b,$$

$$x \in (-\infty, b) \cap (a, +\infty) = (a, b) \text{ sau}$$
$$a < x < b.$$

Fiind date două numere a, b astfel ca $a < b$, dacă x trebuie să fie mai mare decît a și mai mic decît b atunci el este cuprins între aceste două numere.

$$4)\quad \begin{cases} x > b \\ x < a \end{cases} \quad \text{și } a < b \text{ (fig. 17).}$$

$$x \in (b, +\infty) \cap (-\infty, a) = \varnothing \text{ (mulțimea vidă).}$$

Fiind date două numere a, b astfel ca $a < b$ nu există nici un număr care să fie mai mare decît b și mai mic decît a.

Sistemul este imposibil, nu are soluții. Mulțimea soluțiilor este mulțimea vidă.

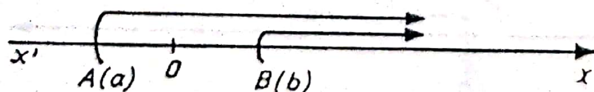


Fig. 15

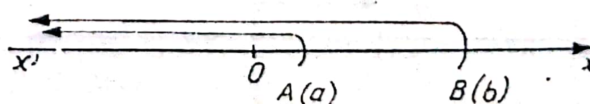


Fig. 16

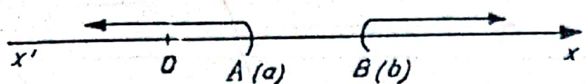


Fig. 17

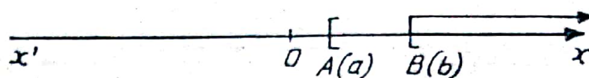


Fig. 18

Inecuațiile pot cuprinde și semnele $\geqslant$; $\leqslant$.

Exemple.

1) $\begin{cases} x \geqslant a \\ x \geqslant b \end{cases}$ și $a < b$ rezultă $x \in [b, +\infty)$ (fig. 18).

2) $\begin{cases} x \leqslant a \\ x \leqslant b \end{cases}$ și $a < b$ rezultă $x \in (-\infty, a]$ (fig. 19).

3) $\begin{cases} x \leqslant b \\ x \geqslant a \end{cases}$ și $a < b$ rezultă $x \in [a, b]$ (fig. 20).

4) $\begin{cases} x \leqslant b \\ x > a \end{cases}$ $a < b$ rezultă $x \in (a, b]$ (fig. 21).

Exemple.

1) $$\begin{cases} 1 - \frac{5 - x}{3} < 2 - \frac{3x}{2} \\ \frac{2x - 1}{3} < \frac{3 - x}{4} \end{cases}.$$

Aducem inecuațiile la forma normală:

Aducem la același numitor; apoi îl eliminăm înmulțind ambii membri ai inecuațiilor cu numitorul respectiv (număr pozitiv).

$$\begin{cases} \frac{6 - 10 + 2x}{6} < \frac{12 - 9x}{6} \\ \frac{8x - 4}{12} < \frac{9 - 3x}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} -4 + 2x < 12 - 9x \\ 8x - 4 < 9 - 3x \end{cases}$$

Separăm termenii:

$$\begin{cases} 11x < 16 \\ 11x < 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{16}{11} \\ x < \frac{13}{11} \end{cases}$$

Soluție: $x < \frac{13}{11}$ sau $x \in \left(-\infty, \frac{13}{11}\right)$ (fig. 22).

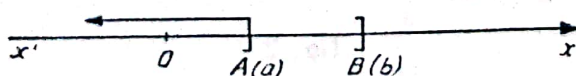


Fig. 19

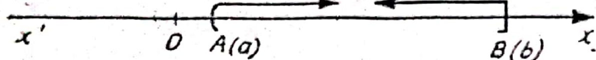


Fig. 21

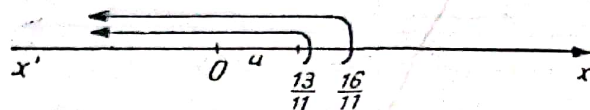


Fig. 22

2) $\begin{cases} \dfrac{2-3x}{5} - 3(2-x) < 7 - \dfrac{1+5x}{3} \\ 4 - \dfrac{2-2x}{7} \geqslant 3 + \dfrac{5x}{7} \end{cases}$

Aducem inecuațiile la același numitor și eliminăm numitorii (numere pozitive).

$$\begin{cases} 6 - 9x - 45(2-x) < 105 - 5 - 25x, \\ 28 - 2 + 2x \geqslant 21 + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 - 9x - 90 + 45x < 100 - 25x \\ -3x \geqslant -5 \end{cases}$$ Împărțind cu $-3 < 0$ ambii membri ai inecuației, sensul se schimbă.

$$\begin{cases} 61x < 184 \\ x \leqslant \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \dfrac{184}{61} \\ x \leqslant \dfrac{5}{3} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x < 3\dfrac{1}{61} \\ x \leqslant 1\dfrac{2}{3} \end{cases},$$

$$x \leqslant \frac{5}{3}, \qquad x \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$$ (fig. 23).

3) $\begin{cases} 7(2-3x) - 5(1-4x) \geqslant 1 - 4x + 3(2-x). \\ \dfrac{1-x}{5} - 1 > 1 - \dfrac{3x-1}{4} + 3x. \end{cases}$

Eliminăm numitorii (numere pozitive) și desfacem parantezele.

$$\begin{cases} 14 - 21x - 5 + 20x \geqslant 1 - 4x + 6 - 3x \\ 4 - 4x - 20 > 20 - 15x + 5 + 60x \end{cases}$$

Separăm termenii:

$$\begin{cases} 6x \geqslant -2 \\ -49x > 41 \end{cases}$$ Împărțim cu coeficientul necunoscutei. Prima inecuație își păstrează sensul ($6 > 0$), a doua își schimbă sensul ($-49 < 0$).

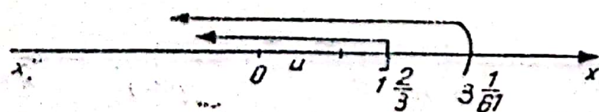


Fig. 23

$$\begin{cases} x \geqslant -\dfrac{1}{3} \\ x < -\dfrac{41}{49} \end{cases}$$ (fig. 24).

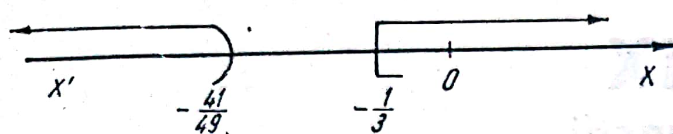


Fig. 24

Fig. 25

Sistemul nu are soluție, este imposibil.

Observare. Fiecare inecuație în parte are soluții dar mulțimile $\left(-\infty, -\frac{41}{49}\right)$ și $\left[-\frac{1}{3} + \infty\right)$ sînt disjuncte cum se vede și pe figură.

4) $$\begin{cases} 5x - 2 + \left(\frac{x-1}{3}\right) < 1 - \frac{1-x}{3} \\ 2x - 1 + \frac{3}{5}(1-x) \leqslant 2 + 3x \end{cases}$$

Eliminăm numitorii (numere pozitive) și desfacem parantezele

$$\begin{cases} 15x - 6 + x - 1 < 3 - 1 + x \\ 10x - 5 + 3 - 3x \leqslant 10 + 15x. \end{cases}$$

Separăm termenii:

$$15x < 9, \qquad x < \frac{3}{5},$$

$$-8x \leqslant 12 \qquad x \geqslant -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} \leqslant x < \frac{3}{5} \qquad \text{sau} \quad x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right) \quad \text{(fig. 25.)}$$

IX
Funcții

1) Polinomul $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$, în care n este număr natural și coeficienții $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale este o funcție definită pe mulțimea numerelor reale cu valori în mulțimea numerelor reale.

Dacă $a_0 \neq 0$ polinomul este de gradul n.

Noi vom studia numai funcțiile-polinom de gradul I și de gradul al II-lea.

2) Funcția $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P(x)$ și $Q(x)$ sînt polinoame, se numește funcție rațională. Ea este definită pe mulțimea numerelor reale în afară de valorile care anulează numitorul (rădăcinile reale ale ecuației $Q(x) = 0$).

Dintre funcțiile raționale vom studia funcția

$$f(x) = \frac{k}{x}, \; k \in R, \quad x \in R - \{0\}.$$

Funcția $f(x) = \frac{k}{x}$ ia valori în mulțimea numerelor reale.

Observare. Pentru două valori oarecare x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$ corespund y_1 și y_2:

$$y_1 = \frac{k}{x_1}, \quad y_2 = \frac{k}{x_2} \quad \text{de unde}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\frac{k}{x_1}}{\frac{k}{x_2}} \quad \text{sau} \quad \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1} .$$

Deci $y = \frac{k}{x}$ exprimă dependența invers proporțională a două mărimi.

Funcții monotone

Definiții. a) Funcția $y = f(x)$ definită pe un interval I este crescătoare pe I dacă pentru orice pereche de valori $x_1 < x_2$ din acest interval, corespund valorile funcției $f(x_1)$, $f(x_2)$ astfel că

$$f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

b) Funcţia $y = f(x)$ definită pe un interval I este descrescătoare pe I dacă pentru orice valori $x_1 < x_2$ din acest interval corespund valorile funcţiei $f(x_1)$, $f(x_2)$ astfel ca

$$f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

c) Funcţiile crescătoare sau descrescătoare pe un interval I se numesc funcţii monotone pe intervalul I.

Exemple.

Funcţia $y = ax + b$ este o funcţie monotonă pe toată axa numerelor reale (domeniu de definiţie) şi anume este crescătoare dacă $a > 0$ şi descrescătoare dacă $a < 0$.

În adevăr, pentru orice $x_1 < x_2$, $f(x_1) = ax_1 + b$, $\quad f(x_2) = ax_2 + b$.

Comparăm valorile funcţiilor prin diferenţa lor.

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2).$$

Dar $x_1 - x_2 < 0$ deci:

$f(x_1) - f(x_2) < 0$ dacă $a > 0$; funcţia este crescătoare.

$f(x_1) - f(x_2) > 0$ dacă $a < 0$; funcţia este descrescătoare.

Funcţiile

$$y = -2x + 5 \quad \text{şi} \quad y = \frac{1}{2}x + 3$$

sînt monotone. Acest lucru se poate urmări în tabelul:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	3	5	$+\infty$	
$y = -2x + 5$	↘	9 ↘	7 ↘	5 ↘	3 ↘	-1 ↘	-5 ↘	$a = -2$	funcţie descrescătoare
$y = \frac{1}{2}x + 3$	↗	2 ↗	$\frac{5}{2}$ ↗	3 ↗	$\frac{7}{2}$ ↗	$\frac{9}{2}$ ↗	$\frac{11}{2}$ ↗	$a = \frac{1}{2}$	funcţie crescătoare

Pentru prima funcţie

$y_1 - y_2 = -2(x_1 - x_2)$. Dacă $x_1 - x_2 < 0$, atunci

$y_1 - y_2 > 0$; funcţia $y = -2x + 5$ este descrescătoare.

Pentru a doua funcţie

$y_1 - y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$. Dacă $x_1 - x_2 < 0$, atunci

$y_1 - y_2 > 0$; funcţia $y = \frac{1}{2}x + 3$ este crescătoare.

Funcţia $y = ax^2$ definită pe mulţimea numerelor reale este monotonă pe intervalele $(-\infty, 0]$ şi $[0, +\infty)$.

Dacă $a > 0$ funcţia este descrescătoare cînd $x \in (-\infty, 0]$ şi crescătoare cînd $x \in [0, +\infty)$.

Dacă $a < 0$, funcţia este crescătoare cînd $x \in (-\infty, 0]$ şi descrescătoare cînd $x \in [0, +\infty)$.

Pentru orice $x_1 < x_2 < 0$, $x \in (-\infty, 0]$,

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1^2 - x_2^2),$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)\,(x_1 + x_2).$$

Dar în condițiile date $(x_1 < x_2 < 0)$, $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 + x_2 < 0$, deci $(x_1 - x_2) \times (x_1 + x_2) > 0$ și

1) $f(x_1) - f(x_2) > 0$ (dacă $a > 0$); funcția este descrescătoare,
2) $f(x_1) - f(x_2) < 0$ (dacă $a < 0$); funcția este crescătoare.

Pentru orice $0 < x_1 < x_2$, $x \in [0, +\infty)$,

$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)\,(x_1 + x_2)$. Dar în acest caz $(x_1 - x_2)\,(x_1 + x_2) < 0$, deci:

1) $f(x_1) - f(x_2) < 0$ (dacă $a > 0$); deci funcția este crescătoare,
2) $f(x_1) - f(x_2) > 0$ (dacă $a < 0$); deci funcția este descrescătoare.

Funcțiile $y = -x^2$ și $y = x^2$

sînt monotone pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0]$ și $[0, +\infty)$.

Tabelul următor ilustrează variația funcțiilor.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$	
$y = -x^2$	↗	-9 ↗	-4 ↗	-1 ↗	0 ↘	-1 ↘	-4 ↘	-9 ↘		funcție crescătoare cînd $x \in (-\infty, 0]$, funcție descrescătoare cînd $x \in [0, +\infty)$.
$y = x^2$	↘	9 ↘	4 ↘	1 ↘	0 ↗	1 ↗	4 ↗	9 ↗		funcție descrescătoare cînd $x \in (-\infty, 0]$, funcție crescătoare cînd $x \in [0, +\infty)$.

Funcția $y = \frac{k}{x}$, $x \in R - \{0\}$ $R \in R - \{0\}$

este monotonă pentru $x \in (-\infty, 0)$ și $x \in (0, +\infty)$.

Dacă $k > 0$, $y = \frac{k}{x}$ este descrescătoare pe cele două intervale.

Dacă $k < 0$, $y = \frac{k}{x}$ este crescătoare pe cele două intervale.

În adevăr, pentru orice $x_1 < x_2 < 0$ sau $0 < x_1 < x_2$,

$$f(x_1) - f(x_2) = k\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right),$$

$$f(x_1) - f(x_2) = k\,\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}.$$

Dar $x_2 - x_1 > 0$ și $x_1 x_2 > 0$ (produs de două numere de același semn).

Deci $\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0$ și

1) $f(x_1) - f(x_2) > 0$ (dacă $k > 0$); funcția este descrescătoare;

2) $f(x_1) - f(x_2) < 0$ (dacă $k < 0$); funcția este crescătoare.

Funcțiile $y = \frac{2}{x}$ și $y = -\frac{1}{x}$ sînt monotone pentru $x \in (-\infty, 0)$ și $x \in (0, +\infty)$.

Tabloul care urmează ilustrează afirmațiile:

x	$-\infty$ $\quad -3 \quad -2 \quad -1$	0	$1 \quad 2 \quad 3 \quad +\infty$	
$y = \frac{2}{x}$	$\searrow -\frac{2}{3} \searrow -1 \searrow -2$ descrescătoare		$2 \searrow 1 \searrow \frac{2}{3} \searrow$ descrescătoare	$k = 2 > 0$
$y = -\frac{1}{x}$	$\nearrow \frac{1}{3} \nearrow \frac{1}{2} \nearrow 1$ crescătoare		$-1 \nearrow -\frac{1}{2} \nearrow -\frac{1}{3} \nearrow$ crescătoare	$k = -1 < 0$

Reprezentarea grafică a funcțiilor. Axe de coordonate

Considerăm axa numerelor reale $x'x$ și axa $y'y$ perpendiculară pe $x'x$ în origine (O). Aceste axe se mai numesc și axe ortogonale sau rectangulare. Sensul pozitiv se consideră pe $x'x$ de la 0 la dreapta; pe $y'y$ de la 0 în sus. Unitatea de măsură se fixează aceeași pentru ambele axe.

Un punct M (fig. 26) din planul acestor două axe ortogonale este determinat prin proiecțiile lui pe cele două axe M' fiind proiecția punctului M pe $x'x$ și M'' proiecția punctului M pe $y'y$. Punctul M este determinat de OM' (abscisa punctului M) și OM'' (ordonata punctului M). Cum proiecția unui punct pe o axă este unică atunci și coordonatele (abscisa și ordonata) punctului sînt unice. Coordonatele punctului se scriu într-o paranteză, întîi abscisa apoi ordonata. De exemplu $A(a,b)$ se citește A de coordonate a și b. Punctele axei $x'x$ au ordonata 0 (zero). Punctele axei $y'y$ au abscisa 0 (zero). Originea are ambele coordonate nule O (0,0).

Reciproc, fiind date coordonatele unui punct, se poate determina în planul axelor poziția unui punct. El se va găsi la intersecția perpendicularelor ridicate pe axe în punctele determinate de abscisă și ordonată. De exemplu, $M(-2, 3)$. Figurăm pe axa $x'x$ punctul $M'(-2,0)$ pe axa $y'y$ punctul $M''(0, 3)$; ducem $MM' \perp x'x$ și $MM'' \perp y'y$. Cele două perpendiculare au un singur punct de intersecție, punctul M (fig. 26).

Cele două axe împart planul în patru regiuni pe care le numim cadrane.

Semnele coordonatelor punctelor situate în diferite cadrane se pot urmări pe figura 27 și pe tabelul următor:

cadranul	I	II	III	IV
abscisa	+	−	−	+
ordonata	+	+	−	−

Punctele $M_1(2, 3)$ și $M_2(2, -3)$ care au aceeași abscisă iar ordonatele, numere opuse, sînt simetrice față de axa $x'x$.

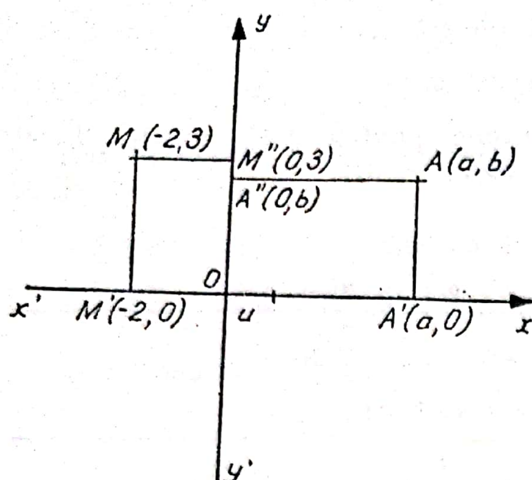


Fig. 26

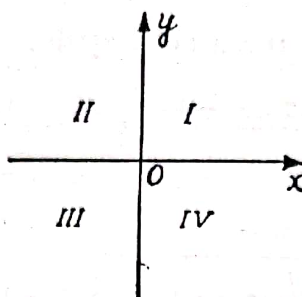


Fig. 27

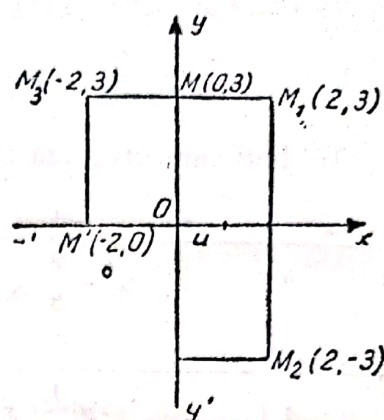


Fig. 28

Punctele $M_1(2, 3)$ şi $M_3(-2, 3)$ care au aceeaşi ordonată iar abscisele, numere opuse, sînt simetrice faţă de axa $y'y$.

Punctele M_2 $(2, -3)$ şi $M_3(-2, 3)$ care au atît abscisele cît şi ordonatele numere opuse sînt simetrice faţă de originea axelor (fig. 28).

Concluzii. Fiecare pereche ordonată de numere determină în planul axelor un punct şi numai unul; fiecărui punct M din plan îi corespunde o pereche ordonată de numere şi numai una singură $(OM' = a,\ OM'' = b)$. La două puncte diferite $M_1 \neq M_2$ corespund două perechi diferite de numere: (a_1, b_1), (a_2, b_2) în care avem cel puţin $a_1 \neq a_2$ sau $b_1 \neq b_2$.

Dacă $a_1 = a_2$ şi $b_1 = b_2$ cele două puncte sînt confundate. Între mulţimea punctelor din plan şi mulţimea perechilor de numere reale, ordonate există o corespondenţă biunivocă.

Graficul unei funcţii. Fiind dată o funcţie $f(x)$ definită pe mulţimea X cu valori în Y, mulţimea punctelor $M[x, f(x)]$ cînd x parcurge mulţimea X, formează graficul funcţiei $f(x)$.

Pentru trasarea graficului figurăm cîteva puncte ale graficului şi le unim printr-o linie (este bine să luăm şi punctele graficului care se găsesc pe axe, dacă există).

Graficul funcţiei $f(x)$, definită pe I, este simetric faţă de axa $y'y$ dacă pentru orice $x \in I$, $f(x) = f(-x)$.

În acest caz funcţia se numeşte *pară*.

În acest caz putem da lui x numai valori pozitive şi apoi să determinăm şi punctele simetrice corespunzătoare.

Exemplu. $f(x) = x^2, \quad x \in R$.

$f(-x) = f(x)$ Dăm cîteva valori pozitive lui x.

x	0	1	2	3
$y = x^2$	0	1	4	9

Punctele $O(0, 0)$; $A(1, 1)$; $B(2, 4)$; $C(3, 9)$ şi simetricele lor faţă de $x'x$, $A'(-1, 1)$; $B'(-2, 4)$; $C'(-3, 9)$, sînt puncte ale graficului funcţiei $f(x) = x^2$.

Graficul funcţiei $f(x)$ este simetric faţă de origine dacă pentru orice $x \in X$ avem $f(-x) = -f(x)$, $(-x \in X)$. În acest caz funcţia se numeşte *impară*.

Deci, dacă pentru două valori opuse ale lui x cînd se parcurge mulţimea de definiţie corespund valori opuse pentru funcţie, graficul este simetric faţă de origine.

Exemplu. $f(x) = 2x$, $x \in R$; $f(x) \in R$.

$$f(-x) = -2x, \qquad f(-x) = -f(x).$$

x	0	1	2	3
$y = 2x$	0	2	4	6

Punctele $O(0, 0)$; $A(1, 2)$; $B(2, 4)$; $C(3, 6)$ şi simetricele lor faţă de origine $A'(-1, -2)$; $B'(-2, -4)$; $C'(-3, -6)$ sînt puncte ale graficului funcţiei $f(x) = 2x$.

Funcţia polinom de gradul I

$f(x) = ax$, $a \neq 0$, reprezintă o dreaptă ce trece prin origine.

Pentru $x = 0$, $y = a \cdot 0$, $y = 0$, $O(0, 0)$.

Deci originea este un punct al graficului.

$x = 1$ $\quad y = a$ $\qquad M_1(1, a)$

$f(-x) = -f(x)$, funcţia este impară.

Orice alt punct M al graficului se găseşte pe dreapta OM_1 (fig. 29). Fie M de abscisă x_0 şi ordonată

$$y = ax_0; \qquad M(x_0, ax_0).$$

Notăm M' şi M'_1 proiecţiile punctelor M şi M_1 pe axa $x'x$.

$$\Delta OM'_1M_1 \sim \Delta OMM' \text{ căci:}$$

$$\widehat{OM'_1M_1} = \widehat{OM'M} = 90°,$$

$$\frac{OM'_1}{OM'} = \frac{M'_1M_1}{M'M}, \left(\frac{1}{x_0} = \frac{a}{ax_0}\right)$$

deci $\widehat{M'_1OM_1} = \widehat{M'OM}$.

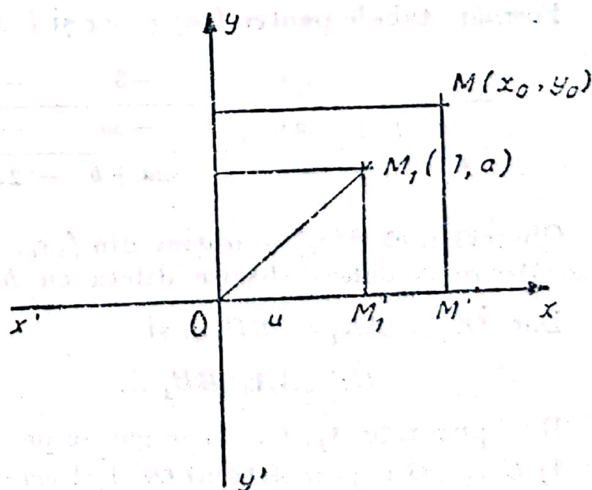


Fig. 29

Aceste două unghiuri egale avînd vîrful O şi latura OM' comune şi fiind aşezate de aceeaşi parte a laturii comune, vor coincide. OM_1 şi OM au aceeaşi direcţie. Punctul M se găseşte pe dreapta OM_1.

Pentru reprezentarea graficului funcţiei $f(x)=ax$ este deci suficient să figurăm un singur punct în afara originei (două puncte determină o dreaptă).

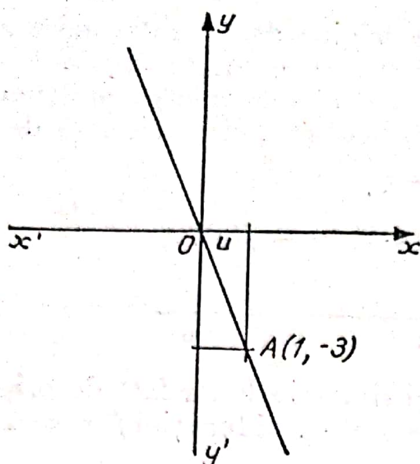


Fig. 30

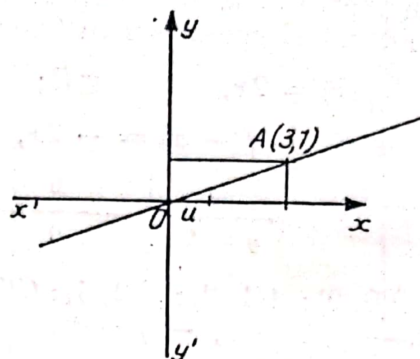


Fig. 31

Exemple. 1) $f(x) = -3x$,

$x = 0,\ y = 0,$ $O(0,\ 0)$,
$x = 1,\ y = -3,$ $A(1,\ -3)$.

Pe grafic se poate urmări că funcţia este descrescătoare ($a < 0$); graficul este simetric faţă de origine (fig. 30).

$$f(-x) = 3x; \quad f(x) = -f(-x).$$

2) $f(x) = \frac{1}{3}x$.

$x = 0,\quad y = 0,$ $O(0,0)$
$x = 3,\quad y = 1,$ $A(3,\ 1)$.

Funcţie crescătoare ($a > 0$); graficul simetric faţă de origine (fig. 31)
$f(-x) = -\frac{1}{3}x,\quad f(x) = -f(-x)$.

$$F(x) = ax + b.$$

Formăm tabele pentru $f(x) = ax$ şi $F(x) = ax + b$.

x	-3	-2	0	1	3	5
$f(x) = ax$	$-3a$	$-2a$	0	a	$3a$	$5a$
$F(x) = ax + b$	$-3a + b$	$-2a + b$	b	$a + b$	$3a + b$	$5a + b$

Observăm că $F(x_0)$ se obţine din $f(x_0)$ adăugind b. Deci ordonatele punctelor corespunzătoare aceleiaşi abscise diferă cu b.

Dar $OC = AA_1 = BB_1 \ldots$ şi

$OC \parallel AA_1 \parallel BB_1 \ldots$ (fig. 32).

Deci punctele A_1, C, B_1 se găsesc pe o paralelă la dreapta OB deoarece:
1) $CA_1 \parallel OA$ (patrulaterul OCA_1A este paralelogram şi
2) $CB_1 \parallel OB$ căci patrulaterul $OC\ B_1B$ este paralelogram).

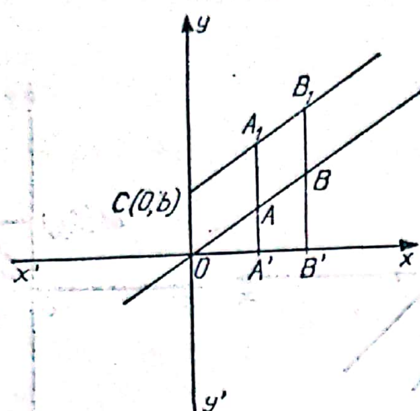


Fig. 32

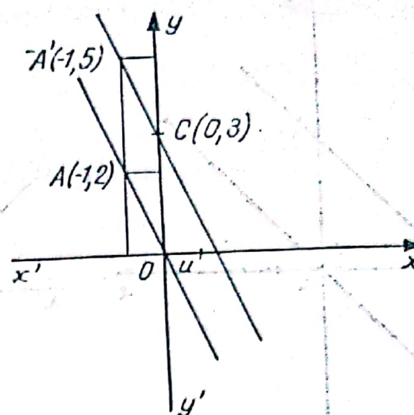


Fig. 33

Prin C nu se poate duce decît o singură paralelă la AB (postulatul lui Euclid). Deci B_1 se găsește pe dreapta CA_1.

Exemple. $f(x) = -2x + 3$.

Reprezentăm $g(x) = -2x$ și $f(x) = -2x + 3$ (fig. 33).

x	-1	0
$g(x)$	2	0
$f(x)$	5	3

$A(-1,2)$, $O(0,0)$,
$A'(-1,5)$, $C(0,3)$.

Concluzie. Pentru a reprezenta grafic funcția polinom de gradul I vom determina două puncte ale dreptei, dînd argumentului două valori arbitrare și calculăm valorile corespunzătoare ale funcției. Pentru ușurință e bine să luăm punctele în care dreapta taie axele de coordonate luînd $x = 0$ și apoi valoarea care anulează pe $f(x)$.

Exemple. 1) $f(x) = -5x + 3$

$$A[x_1 = 0, \quad f(x) = 3] \quad \text{(fig. 34)},$$

$$B\left[x_2 = -\frac{3}{5}, f(x) = 0\right], \quad -5x - 3 = 0, \; x = \frac{-3}{5}.$$

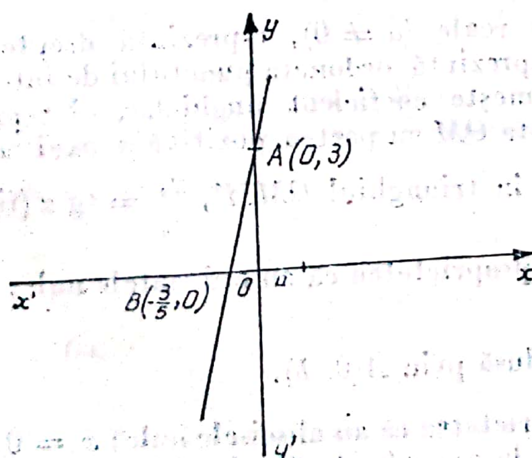


Fig. 34

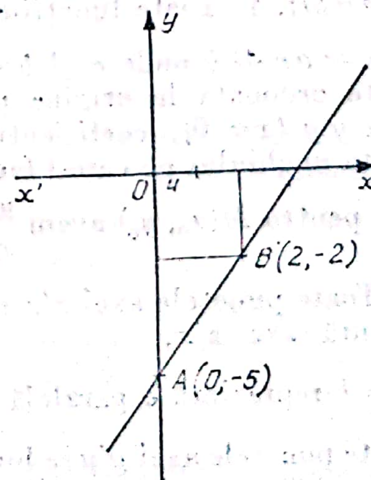


Fig. 35

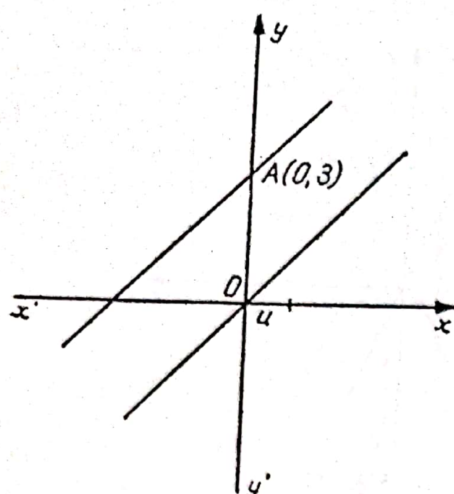


Fig. 36

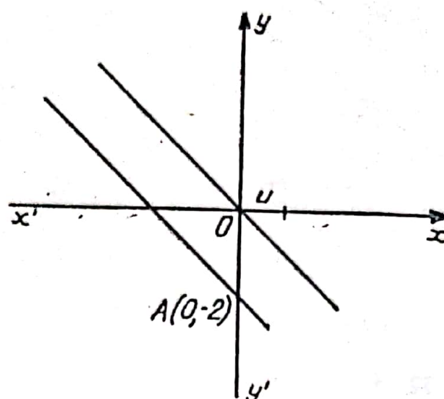


Fig. 37

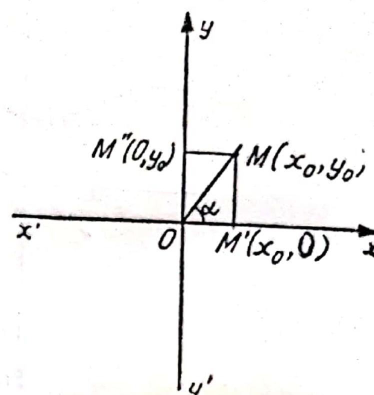


Fig. 38

2) $f(x) = \frac{3}{2}x - 5$.

$A[x_1 = 0, \quad f(x_1) = -5 \quad]$ (fig. 35).

Pentru punctul B este preferabil să luăm $x = 2$ (pentru a lucra cu numere întregi). $B(2, -2)$.

3) $f(x) = x + 3$.

$f_1(x) = x$ (reprezintă prima bisectoare a axelor, bisectoarea unghiului xOy, pentru că pentru orice $x = x_0$ corespunde $y = x_0$).

$f(x) = x + 3$ este o paralelă la prima bisectoare dusă prin $A(0, +3)$ (fig. 36).

4) $f(x) = -x - 2$.

$f_1(x) = -x$ (reprezintă a doua bisectoare a axelor — bisectoarea exterioară a unghiului xOy).

$f(x) = -x - 2$ reprezintă o paralelă la a doua bisectoare a axelor dusă prin $A(0, -2)$ (fig. 37).

Observări. 1° Toate funcţiile de forma

$f(x) = ax + b$ unde a şi b sînt numere reale $(a \neq 0)$, reprezintă drepte; b se numeşte ordonata la origine pentru că reprezintă ordonata punctului de intersecţie cu axa $y'y$ $(x = 0)$, coeficientul a se numeşte coeficient unghiular, el reprezintă tangenta unghiului pe care-l face semidreapta OM cu partea pozitivă a axei $x'x$. În adevăr pentru $M(x_0, y_0)$ avem $\frac{y_0}{x_0} = a$ dar în triunghiul OMM', $\frac{y_0}{x_0} = \operatorname{tg} \alpha$ (fig. 38).

2° Toate punctele axei $x'x$ se bucură de proprietatea că au ordonatele nule; $y = 0$ reprezintă axa $x'x$.

$y = b$ reprezintă o paralelă la axa $x'x$ dusă prin $A(0, b)$.

Toate punctele axei $y'y$ se bucură de proprietatea că au abscisele nule; $x = 0$ reprezintă axa $y'y$, $x = k$ reprezintă o paralelă la axa $y'y$ dusă prin $A(k, 0)$.

Interpretarea geometrică a unui sistem de două ecuații de gradul I, cu două necunoscute

Sistemul
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
reprezintă în plan două drepte. Dacă $b \neq 0$, $b' \neq 0$, putem scrie
$$\begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b} \\ y = -\dfrac{a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'}. \end{cases}$$
Aceste două drepte pot fi:

a) *Concurente*, deci să aibă coeficienți unghiulari diferiți $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{a'}{b'}$ sau $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$.

În acest caz sistemul este bine determinat și coordonatele (x_0, y_0) ale punctului de intersecție constituie soluția unică a sistemului.

b) *Paralele*, deci să aibă coeficienți unghiulari egali și ordonatele la origine diferite:
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ și } \frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'} \text{ sau } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}.$$
În acest caz sistemul este imposibil, nu are nici o soluție.

c) *Confundate*, deci coeficienții unghiulari sînt egali și ordonatele la origine, egale:
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'};\ \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \text{ sau}$$
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$
În acest caz sistemul este nedeterminat, are o infinitate de soluții (perechile de numere care reprezintă coordonatele punctelor dreptei).

Funcția $f(x) = ax^2$.

a) $f(x) = x^2$, $x \in R$, $\quad f(x) \in R$.

Observăm că $f(x) = f(-x)$ căci $f(-x) = (-x)^2$ curba este simetrică față de axa $y'y$ (fig. 39).

Pentru orice valoare a lui $x \in R$, $f(x) > 0$; pentru $x = 0$, $f(x) = 0$. Deci cea mai mică valoare pe care o ia $f(x)$ este 0; spunem că funcția are un minim în punctul 0.

Tabel de cîteva valori.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$	4 ↘	1 ↘	$\frac{1}{4}$ ↘	0 ↗	1 ↗	4 ↗	9 ↗	16

Observare. Am putea considera pentru x numai valori pozitive apoi figurăm prin simetrie față de axa $y'y$ curba și în partea stîngă a axei $y'y$.

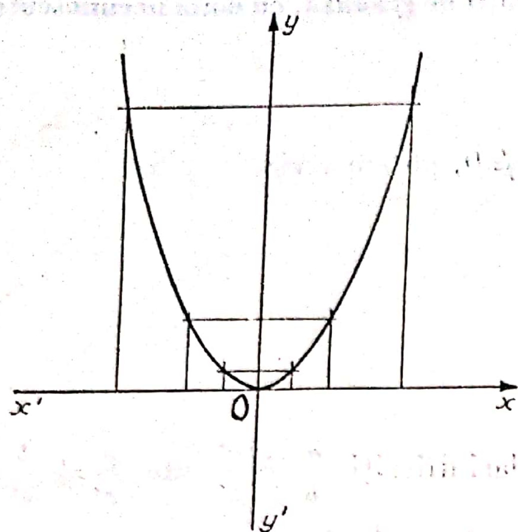


Fig. 39

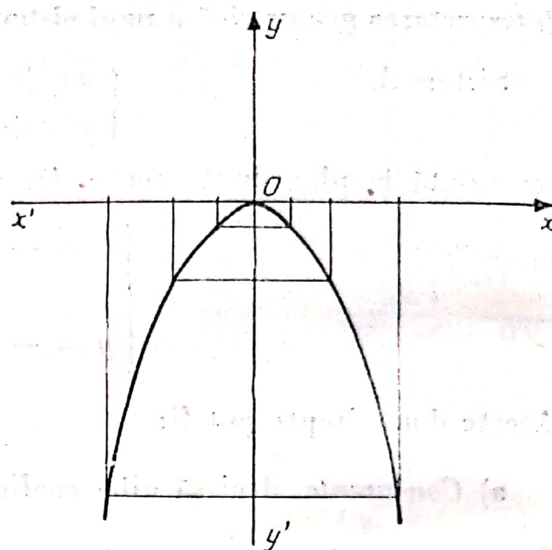


Fig. 40

În intervalul $[0,+\infty)$ funcţia este crescătoare, în intervalul $(-\infty, 0]$ funcţia este descrescătoare; curba are forma din figura 39 şi se numeşte *parabolă*. Punctul de minim, $O(0, 0)$ se numeşte vîrful parabolei.

b) $f(x) = - x^2$.

Aceleaşi observaţii ca şi la funcţia precedentă numai că pentru orice $x \neq 0, f(x)<0$. Pentru $x = 0$, $f(x) = 0$. În $O(0, 0)$ funcţia are cea mai mare valoare, are un punct de maxim. Punctul O este vîrful parabolei.

x	-3		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		2		3
$f(x)$	-9	↗	-4	↗	-1	↗	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↘	-1	↘	-4	↘	-9

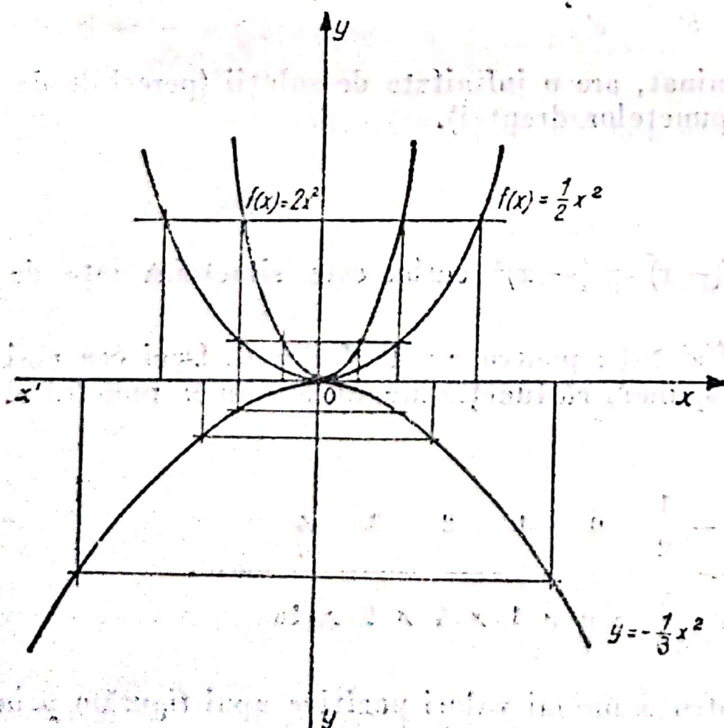


Fig. 41

Curba are forma din figura 40 şi e simetrică faţă de $y'y$.

$$f(-x) = f(x).$$

În intervalul $(-\infty, 0)$ funcţia este crescătoare. În intervalul $(0, +\infty)$ este descrescătoare.

c) $f(x) = 2x^2$.

Facem aceleaşi constatări ca în exemplele precedente

$f(x) = f(-x)$ funcţia este simetrică faţă de Oy; pentru orice $x \in R$, $f(x) > 0$.

Pentru $x = 0$, $f(x)$ cea mai mică valoare; în $O(0, 0)$ funcţia are un *minim* (fig. 41).

d) $f(x) = \frac{1}{2} x^2$.

x	0		1		2		3		4
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	2	↗	$\frac{9}{2}$	↗	8

În partea stîngă vom construi curba prin simetrie (fig. 41).

e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$.

x	0		+1		$\frac{3}{2}$		+3
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2$	0	↘	$-\frac{1}{3}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↘	-3

Concluzii. 1) Funcția $f(x) = ax^2$ reprezintă o curbă care are axa $y'y$ ca axă de simetrie.

2) Punctul O este vîrful parabolei. El este punct de maxim dacă $a < 0$ sau punct de minim dacă $a > 0$.

3) Dacă $a > 0$ funcția este descrescătoare în intervalul $(-\infty, 0]$ și crescătoare în intervalul $[0, +\infty)$.

Dacă $a < 0$ funcția este crescătoare în intervalul $(-\infty, 0]$ și descrescătoare în intervalul $[0, +\infty)$.

4) Curba este deasupra axei $x'x$ dacă $a > 0$ și sub axa $x'x$ dacă $a < 0$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1		2		3		$+\infty$
$y = ax^2,\ a > 0$	0	↗	$\frac{1}{4}a$	↗	a	↗	$4a$	↗	$9a$	↗	$+\infty$
$a < 0$	0	↘	$+\frac{1}{4}a$	↘	$+a$	↘	$+4a$	↘	$9a$	↘	$-\infty$

Funcția rațională $f(x) = \frac{k}{x}$, $x \in R - \{0\}$, $k \in R - \{0\}$.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Dacă x ia valori pozitive foarte mici (din ce în ce mai apropiate de 0), $f(x)$ crește foarte mult ($f(x)$ tinde către $+\infty$). Spunem că dreapta $x=0$ este asimptotă* la curbă.

Dacă x ia valori negative foarte mici în valoare absolută (din ce în ce mai apropiate de 0), $f(x)$ crește foarte mult în valoare absolută și $f(x) < 0$ ($f(x)$ tinde la $-\infty$). Funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ este funcție impară, $f(x) = -f(x)$ deci curba este simetrică față de origine.

* O dreaptă se numește asimptotă la o curbă dacă distanța dintre dreaptă și curbă, măsurată pe verticală (sau pe orizontală) se micșorează din ce în ce (tinde către 0) cînd variabila x (sau variabila y) în valoare absolută ia valori din ce în ce mai mari (tinde către $+\infty$).

Variaţia funcţiei poate fi urmărită pe tabelul

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{3}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↘	-1	↘	$-\infty \mid +\infty$	↘	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{1}{3}$	↘	0

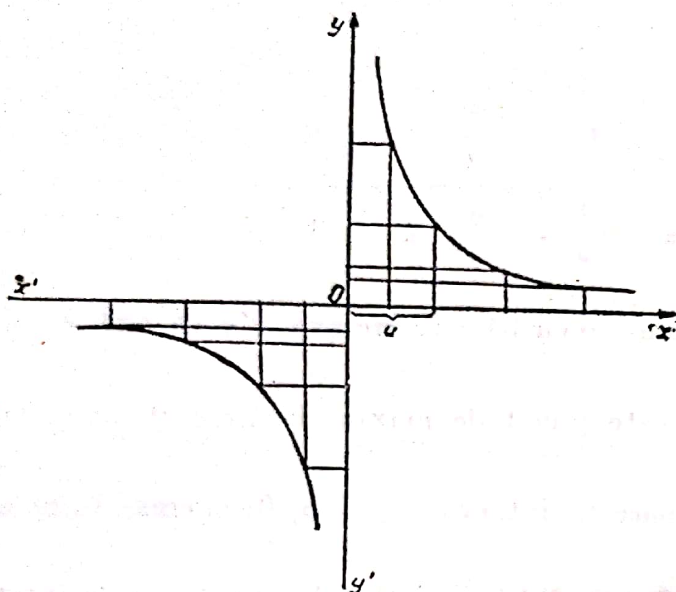


Fig. 42

Pentru a construi graficul, figurăm în planul axelor de coordonate $x'x \perp y'y$ punctele obţinute în tabel şi le unim printr-o linie curbă (fig. 42). Curba obţinută este o hiperbolă.

b) $f(x) = -\frac{2}{x}$,

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), f(x) \in R$.

$f(-x) = -f(x)$. Funcţia este impară deci curba este simetrică faţă de origine. Putem deci studia funcţia numai pe intervalul $(0, +\infty)$.

Graficul funcţiei are axele de coordonate, asimptote.

Variaţia funcţiei se urmăreşte pe tabelul următor:

x	0		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1		2		4		8		32		$+\infty$
$f(x) = -\frac{2}{x}$	$-\infty$	↗	-16	↗	-8	↗	-4	↗	-2	↗	-1	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	$-\frac{1}{4}$	↗	$-\frac{1}{16}$	↗	0

Graficul se obţine construind cîteva puncte din tabel şi simetricele lor faţă de origine apoi unind aceste puncte printr-o linie curbă (fig. 43).

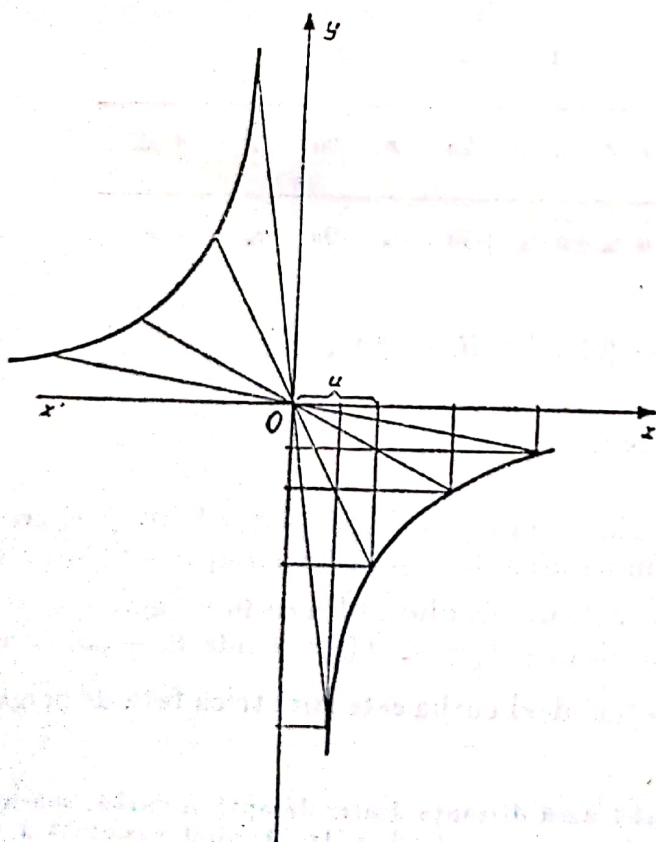


Fig. 43

De exemplu $A\left(\frac{1}{2}, -4\right)$; $B(1, -2)$; $C(2, -1)$; $D\left(4, -\frac{1}{2}\right)$ şi $A'\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$; $B'(-1, 2)$; $C'(-2, 1)$; $D'\left(-4, \frac{1}{2}\right)$.

Concluzii. Funcţia $f(x) = \frac{k}{x}$, $x \in R - \{0\}$ are drept grafic o curbă numită *hiperbolă*.

Hiperbola $y = \frac{k}{x}$ are două asimptote: axele de coordonate. Graficul este simetric față de origine.

Funcția este descrescătoare cînd $x \in (-\infty, 0)$ sau $x \in (0, +\infty)$ dacă $k > 0$ și crescătoare pe aceste două intervale dacă $k < 0$.

Variația funcției se poate urmări pe tabelul următor:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$y = \frac{k}{x}$, $k > 0$	0	$\searrow$	$-\frac{k}{3}$	$\searrow$	$-\frac{k}{2}$	$\searrow$	$-k$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	k	$\searrow$	$\frac{k}{2}$	$\searrow$	$\frac{k}{3}$	$\searrow$	0
$y = \frac{k}{x}$, $k < 0$	0	$\nearrow$	$-\frac{k}{3}$	$\nearrow$	$-\frac{k}{2}$	$\nearrow$	$-k$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	k	$\nearrow$	$\frac{k}{2}$	$\nearrow$	$\frac{k}{3}$	$\nearrow$	0

Observare. Domeniul de definiție al funcțiilor obținute la rezolvarea diferitelor probleme este determinat de condițiile puse în problema respectivă.

Exemple. 1) Volumul conului înscris într-o sferă de rază R este funcție de înălțimea h a conului

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\left[R^2 - (h - R)^2\right] h$$

$V(h) = \frac{\pi h^2}{3}(2R - h)$. $V(h)$ este o funcție polinom de gradul III dar $h \in (0, 2R)$ căci înălțimea conului este număr pozitiv mai mic decît $2R$.

2) Timpul în care un mobil parcurge o distanță dată d este funcție de viteză

$$T(v) = \frac{d}{v}, \quad v \in (0, +\infty)$$

pentru că viteza în această problemă este pozitivă.

X

Rezolvarea problemelor de aritmetică

Problemele de aritmetică se pot clasifica în: *probleme simple*, care se rezolvă printr-o singură operație aritmetică și *probleme compuse*, care se rezolvă prin două sau mai multe operații aritmetice.

Exemple de probleme simple.

1) Să se mărească numărul 212,75 cu 17,3.
2) Un caiet costă 3 lei. Cît costă 15 caiete ?
3) Un automobil a parcurs în $2^1/_2$ ore distanța de 150 km. Care a fost viteza medie pe oră?
4) Un muncitor a lucrat 648 piese în 4 zile. Cîte piese a lucrat pe zi?

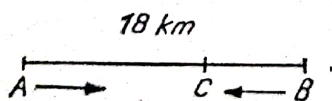
Problemele compuse se descompun în probleme simple care se rezolvă succesiv. În rezolvarea unei probleme compuse se parcurg următoarele etape:

1) Însușirea enunțului și stabilirea relațiilor dintre datele problemei. (Datele problemei pot fi reprezentate grafic.)
2) Descompunerea problemei în probleme simple și alcătuirea planului de rezolvare.
3) Rezolvarea succesivă a problemelor indicate în plan.
4) Verificarea rezultatului obținut în problema dată.
5) Stabilirea formulei de rezolvare a problemei — formule numerice. (Această etapă nu este obligatorie.)

Exemple.

1. *Din două orașe situate la 18 km unul de altul pornesc în același timp doi bicicliști. Dacă merg unul spre celălalt, ei se întîlnesc după 40 minute de la plecare; dacă merg în același sens ei se vor întîlni după 6 ore de la momentul plecării. Ce viteze au cei doi bicicliști?*

1) În problemă este vorba de distanță, viteză și timp. Se știe că $s = vt$. În prima parte a problemei distanța de 18 km este suma distanțelor parcurse de cei doi bicicliști în 40 minute: $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ ore. În a doua parte a problemei această distanță este diferența distanțelor parcurse de cei doi bicicliști în 6 ore. Reprezentăm printr-un desen (fig. 44).



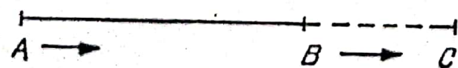


Fig. 44

2) Pentru a afla vitezele celor doi bicicliști, ținînd seama de datele problemei, vedem că:

a) În $\frac{2}{3}$ ore cei doi au parcurs împreună 18 km. Putem afla ce distanță au parcurs într-o oră deci suma vitezelor celor doi bicicliști.

b) În 6 ore biciclistul din A a parcurs cu 18 km mai mult decît cel din B deci a avut o viteză mai mare. Putem afla cît a mers mai mult într-o oră, deci diferența vitezelor.

c) Cunoscînd suma și diferența a două numere se pot afla cele două numere.

3 Rezolvarea problemei.

a) Într-o oră cei doi au parcurs

$$18 : \frac{2}{3} = 27 \text{ km}.$$

Suma vitezelor celor doi bicicliști este de 27 km/oră.

b) Într-o oră primul biciclist (din A) a mers mai mult cu:

$$18 : 6 = 3 \text{ km}.$$

Diferența vitezelor celor doi bicicliști este de 3 km/oră.

c) Cunoscînd suma și diferența a două numere, numărul cel mare este egal cu semisuma dintre suma și diferența celor două numere:

$\frac{27 + 3}{2} = 15$; 15 km/oră este viteza primului biciclist.

$15 - 3 = 12$; 12 km/oră este viteza celui de-al doilea biciclist.

Vitezele sînt: 15 km/oră și 12 km/oră.

4) Verificare. a) Cei doi bicicliști au parcurs în $\frac{2}{3}$ ore distanța:

$$\frac{2}{3}(15 + 12) = \frac{2}{3} \cdot 27 = 18 \text{ km}.$$

b) În 6 ore primul a parcurs mai mult cu

$$3 \cdot 6 = 18 \text{ km}.$$

5) Formula de rezolvare.

Viteza primului biciclist $v_1 = \dfrac{18 : \frac{2}{3} + 18 : 6}{2}$.

Viteza celui de al doilea $v_2 = \dfrac{18 : \frac{2}{3} - 18 : 6}{2}$.

2. *Dintr-un hambar cu cereale s-a scos în prima zi $\frac{1}{5}$ din toată cantitatea, a doua zi $\frac{1}{3}$ din rest, a treia zi s-a scos de 3 ori mai mult decît în a patra zi iar în a patra zi restul, care a fost cu 165 q mai mic decît s-a scos în prima zi. Ce cantitate de grîu a fost inițial în hambar?*

Planul rezolvării problemei.

a) Pentru a afla întreaga cantitate va trebui să găsim ce fracție din aceasta reprezintă valoarea pe care o cunoaștem.

b) Dar pentru aceasta trebuie să știm ce parte din întreaga cantitate s-a scos în a patra zi.

c) Pentru a afla ce fracție s-a scos în a patra zi trebuie să aflăm ce fracție s-a scos în a treia și a patra zi împreună.

d) Pentru a afla această fracție trebuie să aflăm ce fracție s-a scos în primele două zile. Această problemă o putem rezolva cu ajutorul datelor din problemă. Cu rezultatul obținut vom rezolva problema precedentă ş.a.m.d.

Rezolvarea problemei.

În prima și a doua zi s-a scos

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{15} \text{ din întreaga cantitate.}$$

În a treia și a patra zi s-a scos

$$1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \text{ din întreaga cantitate.}$$

În a patra zi s-a scos a patra parte din cantitatea scoasă a treia și a patra zi:

$$\frac{8}{15} : 4 = \frac{2}{15} \text{ (din întreaga cantitate).}$$

Prima dată s-a scos mai mult decît a doua oară cu

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15} \text{ din întreaga cantitate ceea ce reprezintă 165 q.}$$

Întreaga cantitate va fi:

$$165 : \frac{1}{15} = 165 \cdot 15 = 2\,475 \text{ q.}$$

Verificare. Vom calcula cu cît s-a scos mai mult în prima zi considerînd că întreaga cantitate este 2 475 q. Va trebui să obținem 165 q. Ce cantitate s-a luat în fiecare zi?

Prima zi: $\frac{1}{5} \cdot 2\,475 = 495$ q.

A doua zi: $\frac{1}{3}(2\,475 - 495) = \frac{1\,980}{3} = 660$ q.

A treia și a patra zi : $1\,980 - 660 = 1\,320$ q.

A patra zi: $1\,320 : 4 = 330$ q.

Prima dată s-a scos mai mult cu

$$495 - 330 = 165 \text{ q.}$$

Formula de rezolvare.

Cantitatea totală este dată de formula numerică:

$$C = 165 : \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1 - \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{5}\right)\right]}{4} \right\}.$$

3. *La împărțirea a două numere cîtul a fost* 31 *și restul* 11. *Suma dintre deîmpărțit și împărțitor fiind* 555 *să se afle cele două numere.*

Cunoaştem suma celor două numere (555) şi cîtul (31). Deci împărţitorul se cuprinde în deîmpărţit de 31 ori iar în suma dată de 32 ori. Dacă împărţirea ar fi exactă am putea afla împărţitorul. Pentru a fi exactă ar trebui ca deîmpărţitul (deci şi suma dată) să fie cu 11 (restul) mai mic.

Planul rezolvării problemei.

a) Aflăm cît este împărţitorul.

b) Cunoscînd cîtul, împărţitorul şi restul, aflăm deîmpărţitul. Se poate calcula şi din suma cunoscută.

Rezolvarea problemei.

a) Împărţitorul va fi:

$$I = \frac{555 - 11}{31 + 1} = \frac{544}{32}; \qquad I = 17.$$

b) $D = 17 \cdot 31 + 11 = 527 + 11$,
$D = 538$ (sau $D = 555 - 17 = 538$).

Cele două numere sînt 538 şi 17.

Verificare. Considerînd cele două numere cunoscute, calculăm cîtul şi restul:

$$\begin{array}{r|l} 538 & 17 \\ \hline 28 & 31 \\ \hline 11 & \end{array}$$

Formula de rezolvare.

$I = (555 - 11) : (31 + 1)$; $D = [(555 - 11) : (31 + 1)]\, 31 + 11$ sau $D = 555 - [(555 - 11) : (31 + 1)]$.

4. *Pentru construirea unui zid, trei zidari au primit 902 lei. Primul a lucrat 7 zile, al doilea 13 zile, al treilea 5 zile. Cît a primit fiecare dacă primul a primit cu 4 lei pe zi mai puţin decît al doilea şi cu 10 lei mai puţin decît al treilea?*

Planul rezolvării problemei.

a) Ca să aflăm cît a luat fiecare trebuie să aflăm cît a luat primul.

b) Ca să aflăm cît a luat primul trebuie să cunoaştem ce sumă ar fi primit el dacă lucra singur numărul total de zile.

c) Această sumă se poate afla dacă ştim ce sume ar fi primit mai puţin ceilalţi doi dacă ar fi fost plătiţi zilnic ca şi primul.

Ce sumă s-ar primi mai puţin dacă ar fi plătiţi la fel (ca primul)?

Al doilea ar primi: $4 \cdot 13 = 52$ lei.
Al treilea ar primi $10 \cdot 5 = 50$ lei.
$S = 902 - (52 + 50) = 902 - 102$,
$S = 800$ lei.

Primul a luat deci: (presupunem că el a lucrat tot timpul singur)
$S_1 = [800 : (7 + 13 + 5)] \cdot 7 = (800 : 25) \cdot 7$,
$S_1 = 32 \cdot 7 = 224$ lei.

Ceilalţi doi muncitori au primit pentru timpul cît au lucrat:

$S_1 = (32 + 4) \cdot 13 = 36 \cdot 13,$

$S_2 = 468$ lei,

$S_3 = (32 + 10) \cdot 5 = 42 \cdot 5,$

$S_3 = 210$ lei.

Verificare. 1) $S = 224 + 468 + 210 = 902$ lei.

$36 - 32 = 4$ lei

2) $42 - 32 = 10$ lei.

Formula de rezolvare.

$$S_1 = \frac{902 - (4 \cdot 13 + 10 \cdot 5)}{7 + 13 + 5} \cdot 7,$$

$$S_2 = \left[\frac{902 - (4 \cdot 13 + 10 \cdot 5)}{7 + 13 + 5} + 4\right] \cdot 13,$$

$$S_3 = \left[\frac{902 - (4 \cdot 13 + 10 \cdot 5)}{7 + 13 + 5} + 10\right] \cdot 5$$

5. *Un grup de pionieri pleacă dintr-un oraş cu bicicletele în excursie spre o pădure situată la o distanţă de 40 km de la locul de plecare. În acelaşi moment pleacă pe acelaşi drum şi din acelaşi punct un motociclist. Motociclistul ajunge la pădure unde se odihneşte o oră apoi se întoarce în întîmpinarea bicicliştilor. După cît timp de la plecarea din oraş se va întîlni cu ei dacă bicicliştii merg cu 12 km/oră iar motociclistul cu 36 km/oră.*

Figurăm distanţa parcursă prin segmentul BP (fig. 45).

Dacă motociclistul ar fi plecat imediat înapoi, atunci timpul s-ar afla împărţind dublul distanţei la suma vitezelor celor doi călători. Dar motociclistul stă în P o oră; dacă în loc să se odihnească ar fi mers mai departe, atunci ar mai fi mers $\left(\frac{36}{2} = 18\right)$ 18 km. Deci putem modifica problema în acest sens.

Rezolvarea problemei.

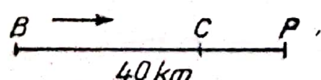
a) Distanţa parcursă pînă la momentul întîlnirii:

$$S = (40 + 18) \cdot 2 = 116 \text{ km}.$$

b) Ce distanţă s-a parcurs într-o oră: $12 + 36 = 48$ km.

c) În cît timp a fost parcursă această distanţă:

$$116 : 48 = 2\frac{5}{12} \text{ ore}.$$



Distanţa a fost parcursă în $2\frac{5}{12}$ ore.

Fig. 45

Verificare. Calculăm distanţa de la locul de pornire pînă la pădure.

Bicicliştii au parcurs $12 \cdot 2\frac{5}{12} = 12 \cdot \frac{29}{12}$

$$BC = 29 \text{ km}.$$

Motociclistul a parcurs: $36 \cdot \left(2\frac{5}{12} - 1\right) = 36 \cdot 1\frac{5}{12} = 51$ km.

$$BP + CP = 51.$$

$$d = \frac{29 + 51}{2} = 40 \text{ km}.$$

Observări. În exemplul (1) am întocmit planul pornind de la datele cunoscute ale problemei. Am format o problemă pe care am putut s-o rezolvăm. Cu rezultatul obținut și cu alte date ale problemei am format o nouă problemă ş.a.m.d. pînă am ajuns la o problemă a cărei întrebare era întrebarea problemei inițiale. Rezolvarea propriu-zisă a urmărit planul punct cu punct. În exemplele (2) și (4) am întocmit planul pornind de la întrebarea problemei. Am format o problemă cu date pe care le-am presupus cunoscute, apoi o problemă pentru a afla aceste date ş.a.m.d. pînă am ajuns la o problemă pe care am putut s-o rezolvăm cu datele cunoscute din problemă. Rezolvarea propriu-zisă se face urmărind planul în ordine inversă, pornind de la ultima problemă.

În exemplele (3) și (5) am pornit de la întrebarea problemei dar am folosit de la început datele problemei formînd probleme în care datele erau cunoscute.

Metode particulare de rezolvare a problemelor

Metoda comparației

Aducerea la același termen de comparație se poate face:

a) prin scădere,

b) prin înlocuirea mărimilor de același fel din problemă prin una din ele.

a) *Compararea prin diferență*

1. *Două brigăzi ale unei cooperative agricole de producție au strîns în prima săptămînă 360 tone de lucernă. În a doua săptămînă prima brigadă a strîns cu 10% mai mult iar a doua cu 15% mai mult decît în prima săptămînă, strîngînd cu 44 tone mai mult. Ce cantitate de lucernă a strîns fiecare brigadă a doua săptămînă?*

Comparăm cele două situații date de problemă.

	Cantitatea recoltată exprimată în procente		Cantitatea totală exprimată în tone
	Brigada întîi	*Brigada a doua*	
	100%	100%	360 t
	10%	10%	44 t
sau			
	10%	10%	36 t
	10%	15%	44 t

La diferența $44 - 36 = 8$ t corespunde diferența de $15\% - 10\% = 5\%$.

Dacă la 5% corespund 8 tone,

la 100% corespund $8 : \frac{5}{100} = 160$ t.

Prima brigadă a strîns în prima săptămînă:

$360 - 160 = 200$ t iar a doua restul de 160 t.

Prima brigadă a strîns în săptămîna a doua $200 + \frac{10}{100} \cdot 200 = 220$ t.

A doua brigadă a strîns $160 + \frac{15}{100} \cdot 160 = 184$ t.

În săptămîna a doua s-au strîns 220 t şi 184 t.

Verificare. In prima săptămînă s-au strîns

$$200 + 160 = 360 \text{ t}.$$

În săptămîna a doua s-au strîns mai mult $\frac{10}{100} \cdot 200 + \frac{15}{100} \cdot 160 = 44$ t.

2. *O fabrică a produs în prima lună maşini de spălat rufe şi frigidere, în total 400. În luna a doua a produs de două ori mai multe maşini de spălat rufe şi cu 15% mai multe frigidere, în total 715. Cîte maşini de spălat şi cîte frigidere s-au produs în fiecare lună?*

Procedînd în mod analog ca la problema precedentă aranjăm datele astfel ca să le putem compara.

Producţia în procente.

	Maşini	*Frigidere*	
Prima lună:	100%	100%	400
Luna a doua:	200%	115%	715

Pentru a putea compara valorile corespunzătoare numai pentru două mărimi considerăm acelaşi procentaj de exemplu pentru maşini

Prima lună:	200%	200%	800
Luna a doua:	200%	115%	715

La diferenţa de procente (200—115) corespund 800—715 frigidere.

85% din numărul frigiderelor este 85.

$$100\% \text{ va fi } 85 : \frac{85}{100} = 100.$$

În prima lună au fost produse 300 maşini şi 100 frigidere.

În a doua săptămînă, $\frac{200}{100} \cdot 300 = 600$ maşini şi $\frac{115}{110} \cdot 100 = 115$ frigidere.

Verificare.

În prima lună s-au produs $300 + 100 = 400$; în a doua, $2 \cdot 300 + \frac{115}{100} \cdot 100 = 715$.

b) *Compararea prin înlocuire*

1. *Cît costă metrul din fiecare material dacă 32 m stambă, 40 m barchet și 25 m pînză costă 1 428 lei iar 1 m de pînză este de 2,4 ori mai scump ca 1 m de stambă, iar 1 m de barchet este de 1,44 ori mai ieftin ca 1 m de pînză.*

Considerăm că din toată suma s-a cumpărat numai pînză înlocuind stamba și barchetul cu pînză; 1 m de stambă este de 2,4 ori mai ieftină deci în loc de 32 m stambă s-ar cumpăra de 2,4 ori mai puțină pînză:

$$32 : 2{,}4 = 32 : \frac{24}{10} = \frac{32 \cdot 10}{24} = \frac{40}{3}; \qquad 13\frac{1}{3} \text{ m pînză.}$$

1 m de barchet este de 1,44 ori mai ieftin ca 1 m de pînză. Deci în loc de 40 m barchet s-ar cumpăra de 1,44 ori mai puțină pînză

$$40 : 1{,}44 = 40 : \frac{144}{100} = 40 \cdot \frac{100}{144} = \frac{250}{9} = 27\frac{7}{9} \text{ m.}$$

Un metru de pînză costă deci

$$1\,428 : \left(25 + 13\frac{3}{9} + 27\frac{7}{9}\right) = 1\,428 : 66\frac{1}{9},$$

$$1\,428 : \frac{595}{9} = 1\,420 \cdot \frac{9}{595} = \frac{108}{5},$$

$$12 \cdot \frac{9}{5} = \frac{108}{5}; \qquad 21\frac{3}{5} = 21{,}60 \text{ lei.}$$

Un metru de stambă va costa

$$21{,}6 : 2{,}4 = 9 \text{ lei.}$$

Un metru de barchet va costa

$$21{,}6 : 1{,}44 = 15 \text{ lei.}$$

Verificare

$$9 \cdot 32 + 15 \cdot 40 + 21{,}6 \cdot 25 = 288 + 600 + 540 = 1\,428 \text{ lei.}$$

2. *În depozitul unei secții de confecții existau 240 m stofă calitatea întîi și 360 m de calitatea a doua în valoare totală de 103 200 lei.*

Pentru confecționarea unor costume s-au folosit 30% din stofa de calitatea întîi și 45% din aceea de calitatea a doua. Dacă stofa de calitatea a doua necesară acestor costume a costat cu 1 440 lei mai mult decît stofa de calitatea întîi utilizată în același scop, să se afle cît costă metrul de stofă din fiecare calitate.

240 m I	360 m II	103 200 lei
30% din 240 = 72 m	45% din 360 = 162 m.	

72 m de calitatea întîi au costat cît 162 m de calitatea a doua minus 1 440 lei.

1 m de calitatea întîi a costat cît, $2\frac{1}{4}$ m $\left(\frac{162}{72} = 2\frac{1}{4} \text{ m}\right)$ mai puțin 20 lei (1 440 : 72 = 20).

Înlocuim cantitatea de 240 m de calitatea întîi prin 540 m $\left(\frac{9}{4} \cdot 240 = 540\right)$ de calitatea a doua mai puţin $20 \cdot 240 = 4\,800$ lei.

Deci, pentru 900 m (540 m + 360 m = 900 m) de calitatea a doua s-ar plăti

$$103\,200 + 4\,800 = 108\,000 \text{ lei.}$$

În consecinţă 1 m de stofă de calitatea a doua costă $108\,000 : 900 = 120$ lei. 360 m de calitatea a doua vor costa

$$120 \cdot 360 = 43\,200 \text{ lei.}$$

Pentru 1 m de stofă de calitatea întîi se plăteşte $(103\,200 - 43\,200) : 240 = 60\,000 : 240 = 250$ lei.

Verificare.

$$250 \cdot 72 = 18\,000.$$
$$120 \cdot 162 = 19\,440.$$
$$19\,440 - 18\,000 = 1\,440.$$

METODA REZOLVĂRII PORNIND DE LA SFÎRŞIT

1. *Trei muncitori fruntaşi au primit pentru o inovaţie o sumă de bani. Primul muncitor a primit* $\frac{1}{3}$ *din sumă plus* 100 *lei, al doilea* $\frac{2}{5}$ *din rest plus* 100 *lei iar al treilea* $\frac{3}{4}$ *din noul rest plus* 140 *lei. Cît a încasat fiecare muncitor?*

Rezolvarea problemei.

Cel de-al treilea muncitor a luat $\frac{3}{4}$ din ultimul rest şi încă 140 lei.

Deci $\frac{1}{4}$ din ultimul rest este 140 lei. Ultimul rest a fost:

$$140 : \frac{1}{4} = 560 \text{ lei.}$$

Al doilea a luat $\frac{2}{5}$ din primul rest plus 100 lei.

Deci $\frac{3}{5}$ din primul rest este:

$$100 + 560 = 660 \text{ lei.}$$

Primul rest: $660 : \frac{3}{5} = 660 \cdot \frac{5}{3} = 220 \cdot 5 = 1\,100.$

Primul a primit $\frac{1}{3}$ din sumă plus 100 lei.

Deci $\frac{2}{3}$ din sumă este: $1\,100 + 100 = 1\,200$ lei.

Suma va fi deci:

$$1\,200 : \frac{2}{3} = 1\,200 \cdot \frac{3}{2} = 600 \cdot 3 = 1\,800 \text{ lei.}$$

Primul muncitor a primit

$$\frac{1}{3}\cdot 1\ 800 + 100 = 700 \text{ lei; rest } 1\ 800 - 700 = 1\ 100 \text{ lei.}$$

Al doilea muncitor a primit

$$\frac{2}{5}\cdot 1\ 100 + 100 = 540 \text{ lei; rest } 1\ 100 - 540 = 560 \text{ lei.}$$

Al treilea muncitor a primit 560 lei.

2. *Dintr-un vas se scoate pe rînd* $\frac{1}{2}$ *din conținut și încă* 1 *l*; $\frac{2}{3}$ *din rest și încă* 1 *l*, $\frac{3}{4}$ *din noul rest și încă* 1 *l*; $\frac{4}{5}$ *din noul rest și încă* 1 *l*; $\frac{5}{6}$ *din noul rest și încă* 1 *l*. *La urmă au rămas* 3 *l de lichid. Cît lichid era inițial în vas?*

Să notăm resturile cu r, r_1, r_2, r_3,

După ce s-au luat $\frac{5}{6}$ din ultimul rest (r_3) au rămas:

$1 + 3 = 4$ *l*. Deci $\frac{1}{6}$ din r_3 reprezintă 4 *l*.

$$r_3 = 4 : \frac{1}{6} = 4 \cdot 6 = 24 \ l.$$

După ce s-au luat $\frac{4}{5}$ din restul r_2 au rămas

$$1 + 24 = 25 \ l. \text{ Deci } r_2 = 25 \cdot 5 = 125 \ l.$$

După ce s-a luat $\frac{3}{4}$ din al doilea rest r_1, au rămas

$1 + 125 = 126$ *l* ceea ce reprezintă $\frac{1}{4}$ din r_1.

$$r_1 = 126 : \frac{1}{4} = 126 \cdot 4 = 404 \ l.$$

După ce s-au luat $\frac{2}{3}$ din al doilea rest $r_1$au rămas

$1 + 504 = 505$ *l* ceea ce reprezintă $\frac{1}{3}$ din primul rest (r).

Primul rest va fi:

$$r = 505 : \frac{1}{3} = 505 \cdot 3 = 1\ 515.$$

După ce s-a luat $\frac{1}{3}$ din întreaga cantitate au rămas $1 + 1\,515 = 1\,516$ l ceea ce reprezintă $\frac{1}{2}$ din întreaga cantitate.

Întreaga cantitate:

$$1\,516 \cdot 2 = 3\,032 \ l.$$

Verificare.

I $\quad \frac{1}{2} \cdot 3\,032 + 1 = 1\,517$; rest $3\,032 - 1\,517 = 1\,515$.

II $\quad \frac{2}{3} \cdot 1\,515 + 1 = 1\,011$; rest $1\,515 - 1\,011 = 504$.

III $\quad \frac{3}{4} \cdot 504 + 1 = 379$; rest $504 - 379 = 125$.

IV $\quad \frac{4}{5} \cdot 125 + 1 = 101$; rest $125 - 101 = 24$.

V $\quad \frac{5}{4} \cdot 24 + 1 = 21$, rest $24 - 21 = 3$.

Metoda grafică

Pentru înțelegerea relațiilor din unele probleme folosim reprezentarea unor valori prin figuri (segmente, dreptunghiuri, cercuri etc.).

1. *Două persoane au depus cîte o sumă de bani la C.E.C. Prima a depus o sumă de 3 ori mai mare decît a doua. Cînd prima a cheltuit 2 680 lei iar a doua 500 lei, în ambele carnete a rămas aceeași sumă. Ce sume au depus cele două persoane inițial?*

Figurăm sumele prin două segmente; unul de 3 ori mai mare decît celălalt (fig. 46).

După ce au cheltuit respectiv 2 680 și 500, sumele au rămas egale.

Prima persoană a cheltuit în plus

$$2\,680 - 500 = 2\,180 \text{ lei}.$$

Această sumă reprezintă de două ori suma inițială depusă de a doua persoană care este

$$2\,180 : 2 = 1\,090 \text{ lei}.$$

Prima persoană a depus

$$1\,090 \cdot 3 = 3\,270 \text{ lei}.$$

Cele două persoane au depus respectiv 3 270 lei și 1 090 lei.

Verificare. $3\,270 - 2\,680 = 590$,
$1\,090 - 500 = 590$.

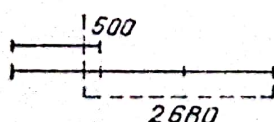


Fig. 46

2. *O ladă cu zahăr conține de 5 ori mai mult zahăr decît altă ladă. Dacă din ambele lăzi se scot cîte 4 kg atunci în prima rămîne de 7 ori mai mult zahăr decît în a doua. Cît zahăr a fost în fiecare ladă?*

Reprezentăm cantitățile inițiale prin două segmente; unul de 5 ori mai mare decît celălalt (fig. 47).

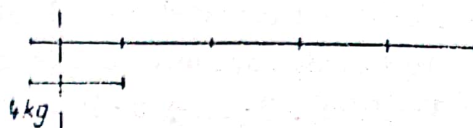


Fig. 47

Dacă scădem din cele două lăzi cîte 4 kg, cantitatea rămasă în a doua ladă se cuprinde în cantitatea rămasă în prima ladă de 5 ori și mai rămîne $4 \cdot 5 - 4 = 16$ kg care reprezintă de 2 ori cantitatea rămasă în a doua ladă. Deci în a doua ladă au rămas $16 : 2 = 8$ kg.

Prima ladă a avut inițial $8 + 4 = 12$ kg.

A doua ladă a avut inițial $12 \cdot 5 = 60$ kg.

Formula de rezolvare.

În prima ladă au fost: $a = \frac{4 \cdot 5 - 4}{2} + 4$.

În a doua ladă a fost : $b = \left(\frac{4 \cdot 5 - 4}{2} + 4\right) \cdot 5$.

Verificare.

1) $60 : 12 = 5$; 2) $60 - 4 = 56$; 3) $12 - 4 = 8$; 4) $56 : 8 = 7$.

Metoda ipotezelor

1. *Muncitorii unei întreprinderi au făcut excursii la Doftana și la hidrocentrala de pe Argeș. Costul excursiei la Doftana a fost de 40 lei iar al celei la hidrocentrală, 60 lei. Cîți muncitori au plecat la Doftana și cîți la hidrocentrală dacă în total au fost 80 de muncitori, și costul total al celor două excursii a fost de 4 200 lei?*

Presupunem că toți muncitorii au plecat la Doftana. Atunci excursia ar fi costat
$$40 \cdot 80 = 3\,200 \text{ lei.}$$

În realitate a costat mai mult cu $4\,200 - 3\,200 = 1\,000$ lei.

Această diferență provine din faptul că o excursie la hidrocentrală costă mai mult cu $60 - 40 = 20$ lei.

Vor fi atîția excursioniști la hidrocentrală de cîte ori se cuprinde 20 în 1 000. $1\,000 : 20 = 50$ (excursioniști).

La Doftana au fost $80 - 50 = 30$ excursioniști.

Verificare. $40 \cdot 30 + 60 \cdot 50 = 1\,200 + 3\,000 = 4\,200$.

2. *Un taxator de tramvai are 100 bancnote de cîte 3 lei și 5 lei în valoare de 440 lei. Cîte bancnote de 3 respectiv 5 lei are?*

Presupunem că ar avea numai bancnote de 3 lei.

Suma a 100 bancnote ar fi $3 \cdot 100 = 300$ lei.

În realitate are mai mult cu $440 - 300 = 140$ lei.

Această diferență provine din faptul că în realitate are și bancnote de 5 lei. Înlocuind o bancnotă de 3 lei cu una de 5, diferența se micșorează cu 2 lei. Deci vor fi atîtea bancnote de 5 lei de cîte ori 2 se cuprinde în diferența de 140 lei.

$$140 : 2 = 70 \text{ (bancnote de 5 lei).}$$

Numărul bancnotelor de 3 lei este $100 - 70 = 30$ bancnote.

Au fost 30 bancnote de 3 lei și 70 bancnote de 5 lei.

Verificare. $3 \cdot 30 + 5 \cdot 70 = 90 + 350 = 440$ lei.

Acțiuni simultane

1. *Două combine lucrînd împreună pot strînge întreaga recoltă de grîu de pe terenul unei C.A.P. în 12 zile. După ce au lucrat împreună 10 zile, lucrul rămas a fost terminat numai de una din ele în 5 zile. În cît timp ar termina de strîns toată recolta fiecare din combine dacă ar lucra singură.*

Considerînd întreaga recoltă un întreg, amîndouă combinele vor strînge într-o zi $\frac{1}{12}$ din întreaga cantitate; în 10 zile vor strînge $\frac{1}{12} \cdot 10 = \frac{5}{6}$ din întreaga cantitate.

În 5 zile, combina care continuă lucrul, va strînge restul: $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ (din întreaga cantitate).

Într-o zi ea strînge $\frac{1}{6} : 5 = \frac{1}{30}$ (din întreaga cantitate).

Toată cantitatea o va strînge deci în $1 : \frac{1}{30} = 30$ zile.

Într-o zi a doua combină strînge

$$\overset{5)}{\frac{1}{12}} - \overset{2)}{\frac{1}{30}} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}.$$

Toată recolta o strînge în $1 : \frac{1}{20} = 20$ zile.

Verificare. În 12 zile cele două combine pot strînge $12 \cdot \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{20}\right) = 12 \cdot \frac{5}{60} = 1$ adică întreaga recoltă. Prima combină strînge în 15 zile $\frac{1}{30} \cdot 15 = \frac{1}{2}$ din toată recolta.

A doua combină strînge în 10 zile $\frac{1}{20} \cdot 10 = \frac{1}{2}$ din toată recolta.

Cele două combine au strîns $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (întreaga recoltă).

2. *Un bazin se umple prin trei robinete. Dacă curg numai primul și al doilea robinet împreună, atunci bazinul se umple în 6 ore; dacă curg numai al doilea și al treilea, bazinul se umple în 7 ore și 30 minute, dacă curg numai primul și al treilea, bazinul e umple în 10 ore. În cît timp ar umple bazinul fiecare robinet dacă ar curge singuri Se consideră debitul constant.*

Vom nota cu I, II, III cele trei robinete.

Robinetele I și al II-lea umplu $\frac{1}{6}$ din bazin într-o oră.

Robinetele al II-lea și al III-lea umplu $\frac{1}{7\frac{1}{2}} = \frac{2}{15}$ din bazin.

Robinetele I și al III-lea umplu $\frac{1}{10}$ din bazin.

Deci într-o oră, dacă s-ar deschide toate robinetele, s-ar umple jumătate (fiecare curge cîte 2 ore).

$$\overset{5)}{\frac{1}{6}} + \overset{2)}{\frac{2}{15}} + \overset{3)}{\frac{1}{10}} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}; \quad \frac{2}{5} : 2 = \frac{1}{5} \text{ din bazin.}$$

Robinetul al III-lea va umple într-o oră $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ din bazin.

Robinetul I va umple într-o oră $\frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$ din bazin.

Robinetul al II-lea va umple într-o oră $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ din bazin.

Bazinul va fi umplut de fiecare robinet dacă ar curge singur astfel:

robinetul I $\quad 1 : \frac{1}{15} = 15$ ore,

robinetul al II-lea $\quad 1 : \frac{1}{10} = 10$ ore,

robinetul al III-lea $\quad 1 : \frac{1}{30} = 30$ ore.

Verificare.

1) $6 \cdot \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10}\right) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1,$

2) $7\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{30}\right) = \frac{15}{2} \cdot \frac{4}{30} = 1,$

3) $10\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{30}\right) = 10 \cdot \frac{3}{30} = 1.$

De cele mai multe ori pentru rezolvarea unei probleme folosim succesiv mai multe metode pentru a afla datele necesare rezolvării ei.

1. *10 tone de mere, de calități diferite, au fost așezate în 850 lădițe; merele de calitatea întîi în lădițe de 15 kg și cele de calitatea a doua în lădițe de 10 kg. Prețul total al merelor este de 49 000 lei și 3 kg de mere de calitatea a doua valorează cît 2 kg de mere de calitatea întîi. Să se afle:*

a) *Cîte lădițe de fiecare calitate erau?*

b) *Ce cantitate de mere din fiecare calitate erau?*

c) *Cît costă 1 kg de mere din fiecare fel?*

a) Au fost 850 lădițe de 15 kg și 10 kg, total 10 t de mere.

Presupunem că toate lădițele au fost de 15 kg. Cantitatea totală ar fi fost 15 × × 850 = 12 750 kg.

Dar în realitate au fost numai 10 t = 10 000 kg.

$$12\,750 - 10\,000 = 2\,750 \text{ kg}.$$

Diferența de 2 750 kg provine din faptul că au fost și lădițe de 10 kg. Pentru fiecare lădiță de 10 kg corespunde o diferență de 15 — 10 = 5 kg.

Numărul lădițelor de 10 kg: 2 750 : 5 = 550 lădițe.

Numărul lădițelor de 15 kg: 850 — 550 = 300 lădițe.

b) Cantitatea de mere de calitatea întîi: 15 × 300 = 4 500 kg.

Cantitatea de mere de calitatea a doua: 10 × 550 = 5 500 kg.

c) Sînt două calități de mere: 4 500 kg de calitatea întîi și 5 500 kg mere calitatea a doua care costă în total 49 000. Înlocuim merele de calitatea întîi cu mere de calitatea a doua.

4 500 kg mere de calitatea întîi costă cît $\frac{3 \times 4\,500}{2} = 3 \times 2\,250 = 6\,750$ kg.

Deci 49 000 lei reprezintă costul a 12 250 kg mere de calitatea a doua deoarece 6 750 + 5 500 = 12 250 kg. Costul unui kilogram de mere de calitatea a doua este 49 000 : 12 250 = 4 lei.

Merele de calitatea întîi costă 3 × 4 : 2 = 6 lei.

Verificarea se poate face pornind de la sfîrșit cu ultima problemă (c) apoi cu (b) și (a).

Formulele de rezolvare se stabilesc pentru fiecare punct. Ultima problemă cuprinde rezultatele problemelor precedente. Să stabilim formula care exprimă prețul unui kilogram de calitatea întîi.

$$N = \frac{3}{2} \cdot 49\,000 : \left\{\frac{3}{2} \times 15 \left(850 - \frac{15 \times 850 - 10\,000}{15 - 10}\right) + \left[10 \times \frac{15 \times 850 - 10\,000}{15 - 10}\right]\right\}.$$

2. *Doi muncitori au executat o lucrare și au primit* 2 880 *lei. Dacă primul muncitor ar fi lucrat* 2 *zile și al doilea* 5 *zile, ar fi primit* 264 *lei. Dacă numărul zilelor lucrate de primul muncitor ar fi de* 2,5 *ori cît numărul zilelor lucrate de cel de-al doilea, adică, dacă l-ar întrece cu* 39 *zile, atunci ar primi împreună* 3 120 *lei. Cît a primit fiecare? Cîte zile a lucrat fiecare?*

a) Cunoaștem raportul dintre numărul zilelor lucrate de fiecare $\left(\frac{25}{10}\right)$ și diferența care este 39 lei. Numărul zilelor lucrate de-al doilea se cuprinde în diferență de 2,5 — 1 = 1,5 ori.

Numărul zilelor lucrate de al doilea muncitor:

$$39 : 1{,}5 = 26 \text{ (zile)}.$$

Numărul zilelor lucrate de primul muncitor:

$$26 + 39 = 65 \text{ (zile)}.$$

b) Pentru 65 zile (primul muncitor) respectiv 26 zile (al doilea muncitor) primesc 3 120 lei.

Pentru 2 zile (primul muncitor) respectiv 5 zile (al doilea muncitor) primesc 264 lei.

Aducem la acelaşi termen de comparaţie.

$$65 \text{ zile} \ldots 26 \text{ zile} \ldots \qquad 3\,120 \text{ lei}$$

$$65 \text{ zile} \ldots 65 \cdot \frac{5}{2} \ldots \qquad 65 \cdot \frac{264}{2} \text{ lei.}$$

Diferenţa de (8 580 — 3 120) lei provine din diferenţa de (162,5 — 26) zile.
Pentru o zi, al doilea a primit 5 460 : 136,5 = 40 lei.

Pentru o zi, primul a primit $\frac{264 - 40 \times 5}{2} = \frac{64}{2} = 32$ lei.

c) Pentru o lucrare, doi muncitori plătiţi pe zi cu 40 lei respectiv 32 lei au primit 2 880 lei. Cîte zile au lucrat cei doi muncitori?

$$2\,880 : (40 + 32) = 2\,880 : 72 = 40 \text{ zile.}$$

Probleme cu mărimi proporţionale

Probleme cu rapoarte şi proporţii

1. *O barcă parcurge o distanţă în sensul curentului apei în $4\frac{1}{2}$ ore, iar împotriva curentului apei în 6 ore. În cît timp ar parcurge aceeaşi distanţă o plută care ar înainta cu viteza apei?*

Dacă notăm cu : v_0 viteza apei; v viteza proprie a bărcii; v_1 viteza bărcii în sensul curentului apei, v_2 viteza bărcii în sens contrar curentului apei, atunci

$$v_1 = v + v_0$$
$$v_2 = v - v_0.$$

Notăm cu t_0, t, t_1, t_2 respectiv timpul necesar în fiecare caz. Pentru parcurgerea aceleiaşi distanţe, viteza şi timpul sînt invers proporţionale.

Avem următoarea situaţie:

viteza în km/oră		timpul în ore
v_0		t_0
$v_1 = v_0 + v$		$t_1 = 4\frac{1}{2}$ ore
$v_2 = v - v_0$		$t_2 = 6$ ore
$\frac{v_1}{v_2} = \frac{6}{4\frac{1}{2}}$	sau	$\frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{3}$.

Trebuie aflat t_0.

$$\frac{t_0}{t_2} = \frac{v - v_0}{v_0}; \text{ trebuie calculat raportul } \frac{v - v_0}{v_0}.$$

Observăm că $\frac{v_0 + v}{v - v_0} = \frac{4}{3}$, de unde:

$$\frac{v - v_0}{2v_0} = \frac{3}{1} \quad \text{sau} \quad \frac{v - v_0}{v_0} = 6.$$

Deci $\frac{t_0}{6} = 6$, $\qquad t_0 = 36.$

Pluta ar parcurge întreaga distanță în 36 ore (dacă ar merge cu viteza apei).

2. *Un tren de marfă merge cu o viteză constantă de 34 km/oră și parcurge o distanță în 8 ore. După ce a făcut 102 km este silit să oprească* $\frac{3}{4}$ *oră. Cu ce viteză trebuie să continuie drumul pentru a ajunge la ora fixată?*

Timpul în care a parcurs 102 km: 102 : 34 = 3 ore.

Trenul mai avea de mers 5 ore pentru a parcurge distanța rămasă. Oprindu-se $\frac{3}{4}$ oră, trebuie să parcurgă această distanță în $4\frac{1}{4}$ ore.

5 ore... 34 km/oră

$4\frac{1}{4}$ ore... x

Mărimile sînt invers proporționale. Dacă timpul se mărește de un număr de ori, viteza se micșorează de același număr de ori

$$\frac{5}{4\frac{1}{4}} = \frac{x}{34}; \qquad x = \frac{34 \times 5}{\frac{17}{4}}$$

$$x = \frac{34 \times 5 \times 4}{17}, \qquad x = 40 \text{ km/oră}.$$

3. *O soluție de 40 kg de apă cu sare conține 3,5 kg sare. Cîtă apă trebuie să-i adăugăm pentru ca noua soluție să conțină în 30 kg numai 1 kg de sare.*

Trebuie să aflăm cantitatea de soluție obținută.

1 kg sare... 30 kg soluție

3,5 kg sare..... x

Cantitatea de sare și cantitatea de soluție sînt mărimi direct proporționale.

$$\frac{1}{3{,}5} = \frac{30}{x}, \qquad x = 3{,}5 \times 30 = 105 \text{ kg}.$$

Trebuie să adăugăm 105 — 40 = 65 kg apă.

4. *Trei muncitori au primit pentru o lucrare 426 lei. Primul a lucrat de* $\frac{3}{4}$ *ori mai mult decît al treilea, al doilea de 2,4 ori mai mult decît primul. Cît a primit fiecare?*

Suma este împărţită în părţi proporţionale cu 3 numere pe care trebuie să le determinăm. Fie a, b, c sumele primite respectiv de primul, al doilea şi al treilea muncitor.

$$a = \frac{3}{4} \cdot c, \qquad \text{sau} \qquad \frac{a}{3} = \frac{c}{4},$$

$$b = \frac{24}{10} \cdot a \qquad \text{sau} \qquad \frac{b}{12} = \frac{a}{5}.$$

Să transformăm proporţiile astfel încît rapoartele care-l conţin pe a să aibă acelaşi numitor (3×5)

$\frac{a}{15} = \frac{c}{20}$, $\frac{b}{36} = \frac{a}{15}$. Avem un şir de rapoarte egale. Aplicăm proprietatea şirului de rapoarte egale.

$$\frac{a}{15} = \frac{b}{36} = \frac{c}{20} = \frac{426}{71} = 6.$$

$$a = 90, \; b = 216, \; c = 120.$$

Verificare. $S = 426 = 90 + 216 + 120$.

$$90 : 120 = \frac{3}{4},$$

$$216 : 90 = 2{,}4.$$

5. *La un concurs de mîini îndemînatice s-a dat un premiu de 726 lei la trei concurenţi. Toţi au lucrat tot atît de bine dar timpul de execuţie a fost diferit; primul a executat într-o oră şi 12 minute, al doilea într-o oră şi 20 de minute şi al treilea într-o oră şi 4 minute. Suma s-a împărţit invers proporţional cu timpul de execuţie. Cît a primit fiecare?*

A împărţi numărul 726 în părţi invers proporţionale cu numerele $1\frac{12}{60}$, $1\frac{20}{60}$, $1\frac{4}{60}$ înseamnă a-l împărţi în părţi direct proporţionale cu numerele:

$$\frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6}; \quad \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{1}{\frac{16}{15}} = \frac{15}{16} \quad \text{sau cu numărătorii fracţiilor}$$

$\overset{8)}{\frac{5}{6}}$; $\overset{12)}{\frac{3}{4}}$; $\overset{3)}{\frac{15}{16}}$ aduse la acelaşi numitor adică cu 40, 36, 45.

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{36} = \frac{z}{45} = \frac{726}{121} = 6.$$

$$x = 240, \quad y = 216, \; z = 270.$$

Probleme de amestec și aliaj

Titlul unui aliaj este raportul dintre masa metalului prețios și masa totală a aliajului; $T = \frac{m}{M}$. De obicei exprimăm titlul unui aliaj printr-o fracție zecimală cu numitorul 1 000.

1. Cunoscînd titlul aliajului și cantitatea de aliaj, aflăm cantitatea de metal prețios astfel:

$$m = T \cdot M.$$

2. Cunoscînd titlul aliajului și cantitatea de metal prețios, aflăm cantitatea totală astfel:

$$M = \frac{m}{T}.$$

3. Fiind date două aliaje din aceleași metale dar cu titluri diferite, M_1 cu T_1, M_2 cu T_2, atunci titlul T al aliajului obținut prin topirea lor este

$$T = \frac{M_1T_1 + M_2T_2}{M_1 + M_2},$$

În adevăr, avem $m_1 = M_1T_1$, $m_2 = M_2T_2$.
Cantitatea totală de aliaj obținut este $m = m_1 + m_2$.

$$T = \frac{m}{M}, \qquad T = \frac{m_1 + m_2}{M}, \qquad T = \frac{M_1T_1 + M_2T_2}{M_1 + M_2}.$$

4. Dacă topim două aliaje M_1 și M_2, titlul noului aliaj T depinde numai de raportul maselor celor două aliaje.

$$\text{Din} \quad T = \frac{M_1T_1 + M_2T_2}{M_1 + M_2} \quad \text{obținem}$$

$$TM_1 + TM_2 = M_1T_1 + M_2T_2,$$

$$M_1(T - T_1) = M_2(T_2 - T),$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{T_2 - T}{T - T_1}.$$

Exemplu. Un lingou de argint cu titlul de 0,875 are masa de 2 340 g; cîtă aramă trebuie să-i adăugăm pentru a obține un aliaj cu titlul 0,835.

În primul aliaj se găsește $m = 2\,340 \times 0{,}875$ g argint curat. Aceeași cantitate de argint curat va avea și al doilea aliaj. Știm că $M = \frac{m}{T}$.

$$M = \frac{2\,340 \times 0{,}875}{0{,}835}, \qquad M = 2\,452{,}10 \text{ g}.$$

$$2\,452{,}10 - 2\,340 = 112{,}10 \text{ g}.$$

Probleme de procente

Un raport cu numitorul 100 se numeşte raport procentual. El este de forma $\frac{p}{100}$ şi se notează $p\%$. Înţelegem că la 100 unităţi dintr-o mărime corespund p unităţi din altă mărime.

Exemple. 1) Concentraţia unei soluţii de zahăr este 8% (la 100 grame soluţie corespunde 8 grame zahăr).
2) Tăria unui vin este 5% (la 100 părţi vin sînt 5 părţi alcool).
3) Rabat 5% (la fiecare 100 lei se scad 5 lei, deci la 100 lei corespund 95 lei).
4) Gratificaţie 2% (la fiecare 100 lei se acordă 2 lei, deci la 100 lei corespund 102 lei).

Aplicaţie. Lemnele pierd prin uscare 18% din masă. Din cîte kilograme de lemne verzi s-au obţinut 4 674 kg lemne uscate.

Rezolvare

Dacă s-au pierdut 18 kg din 100 kg, înseamnă că au rămas 82 kg deci:

82 kg. . . . . 100 kg
4 674 kg. x

$$x = \frac{4\,674 \times 100}{82} = 5\,700 \text{ kg.}$$

Problemele cu mai multe mărimi proporţionale (de regulă de trei compusă) se rezolvă reducîndu-le la probleme de regulă de trei simplă.

Exemplu. Dacă un călător îşi măreşte viteza cu $\frac{2}{5}$ din ea, cîte ore trebuie să meargă în fiecare zi pentru a parcurge în 5 zile distanţa pe care a parcurs-o în 7 zile mergînd cîte 9 ore pe zi?

Vom considera viteza egală cu unitatea (1 întreg) iar viteza mărită, $\frac{7}{5}$.

Problema se poate rezolva şi prin reducerea la unitate şi prin metoda proporţiilor

Reducerea la unitate

Timpul în zile	viteza	nr. orelor pe zi
7 zile	1	9 ore
5 zile	$\frac{7}{5}$	x

7 zile	1	9 ore
1 zi	1	9×7 ore
5 zile	$\frac{7}{5}$	$\frac{9 \times 7}{5} \cdot \frac{5}{7} = 9$ ore.

Deci $x = 9$ ore.

Metoda proporţiilor

$$\begin{array}{lll} 7 \ldots\ldots\ldots & 1 \ldots\ldots\ldots & 9 \text{ ore} \\ 5 \ldots\ldots\ldots & \frac{7}{5} \ldots\ldots\ldots & x \end{array}$$

Reducem problema la o problemă de regulă de trei simplă prin egalarea valorilor unei mărimi.

$$\begin{array}{lll} 7 \ldots\ldots\ldots & 1 \ldots\ldots\ldots & 9 \text{ ore} \\ 5 \ldots\ldots\ldots & 1 \ldots\ldots\ldots & y. \end{array}$$

Numărul zilelor şi al orelor pe zi fiind invers proporţionale, putem scrie

$$\frac{7}{5} = \frac{y}{9}; \qquad y = \frac{7 \times 9}{5}.$$

Formăm o nouă problemă în care folosim valoarea găsită pentru y.

$$\begin{array}{lll} 5 \ldots\ldots\ldots & 1 \ldots\ldots\ldots & \frac{7 \times 9}{5} \\ 5 \ldots\ldots\ldots & \frac{7}{5} \ldots\ldots\ldots & x. \end{array}$$

Deci $\dfrac{1}{\frac{7}{5}} = \dfrac{x}{\frac{7 \times 9}{5}}$ de unde $x = 9$ ore.

XI
Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor

Pentru a rezolva o problemă cu ajutorul ecuațiilor, parcurgem mai multe etape.

1. Stabilim mărimile despre care este vorba în problemă, ce relație există între aceste mărimi, ce valori ale acestor mărimi sînt date și ce valori sînt necunoscute. Din aceste valori necunoscute alegem pe acelea pe care le vom nota cu litere (de obicei cu litere de la sfîrșitul alfabetului x, y, z) și pe care le vom considera în raționamentele noastre cunoscute.

2. Exprimăm celelalte valori necunoscute din problemă cu ajutorul datelor cunoscute și a celor pe care le-am notat cu litere (x,y,z).

3. Formarea ecuațiilor: scrierea simbolică a relațiilor date în problemă între diferite valori ale mărimilor. Este bine să urmărim în ecuațiile scrise dacă am egalat mărimi de același fel, exprimate cu aceeași unitate de măsură.

4. Rezolvarea ecuației. Stabilirea răspunsului la problema dată. Interpretarea soluției (dacă e cazul).

5. Discuția soluției dacă constantele problemei sînt date literale.

6. Verificarea soluției în problemă.

Exemple

1. *De la o exploatare forestieră se trimit din cantitatea de lemne tăiate* 10 *steri, se mai taie o cantitate egală cu cantitatea rămasă și se mai trimit* 30 *steri; se mai taie de trei ori cantitatea care a rămas după ultimul transport și se mai trimit* 360 *steri. În acest fel a rămas neexpediată o cantitate egală cu cea inițială. Ce cantitate de lemne a fost inițial?*

Notăm cantitatea inițială în steri cu x. Pe baza relațiilor din problemă exprimăm celelalte date.

După ce s-au trimis 10 s au rămas $x - 10$

Se dublează cantitatea $2(x - 10)$

Se mai trimit 30 s deci rămîn $2x - 20 - 30 = 2x - 50$

Se taie de trei ori mai mult decît a rămas; deci se obține în total $4(2x - 50)$

Se mai trimit 360 s și rămîn $4(2x - 50) - 360$.

Acest ultim rest este egal cu cantitatea inițială.

Scriem această relație (Ecuația problemei):

$$4(2x - 50) - 360 = x.$$

Rezolvăm ecuația: $8x - x = 560;$

$$7x = 560; \qquad x = 80.$$

Verificarea în problemă se face ca și în aritmetică înlocuind valoarea găsită în locul necunoscutei din problemă.

Au fost 80 s și s-au trimis 10 s rămîn 70 s. Se mai taie 70 s deci vor fi $70 \cdot 2 = 140$ s. Din 140 s se mai trimit 30 s rămîn $140 - 30 = 110$ s. Se mai taie de 3 ori 110 deci vor fi $3 \cdot 110 + 110 = 440$ s. Se trimit din cei 440 s, 360 s și rămîn $440 - 360 = 80$ adică tot cît a fost inițial.

Inițial au fost 80 steri de lemn.

2. *Două robinete curgînd împreună pot umple un bazin în 8 ore. Cele două robinete au fost deschise timp de 2 ore apoi s-a închis primul robinet și bazinul s-a umplut în 18 ore de la închiderea primului robinet. În cît timp ar umple bazinul fiecare robinet?*

Capacitatea bazinului nu e cunoscută și nu interesează în problemă, dar într-un anumit timp se umple o anumită parte din el. Vom considera bazinul ca un întreg.

a) Notăm timpul în ore necesare primului robinet să umple singur bazinul cu x(ore).

Timpul necesar celui de-al doilea cu y(ore).

Atunci într-o oră primul umple $\frac{1}{x}$ din bazin

iar al doilea umple $\frac{1}{y}$ din bazin.

Împreună într-o oră umplu $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ din bazin.

Exprimăm relațiile date în problemă:

$$\begin{cases} 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{18}{y} = 1 \\ 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1. \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul folosind introducerea unei necunoscute noi $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$.

$$\begin{cases} 2u + 20v = 1 \\ 8u + 8v = 1 \end{cases} \Big| -4 \qquad \begin{cases} -8u - 80v = -4 \\ 8u + 8v = 1 \end{cases}$$

$$-72v = -3$$

$$v = \frac{3}{72}; \qquad v = \frac{1}{24}.$$

$$2u = 1 - \frac{20}{24}$$

$$2u = 1 - \frac{5}{6}$$

$$2u = \frac{1}{6}, \quad u = \frac{1}{12}.$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{12} \\ v = \frac{1}{24} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 12 \\ y = 24 \end{cases}.$$

b) Problema se putea rezolva considerînd ca necunoscută nu timpul (ceea ce se cere în problemă) ci partea din bazin pe care o umple într-o oră fiecare robinet.

Într-o oră primul robinet umple x părți din bazin (unități fracționare).

Într-o oră al doilea robinet umple y părți din bazin. Deci împreună într-o oră $(x + y)$ părți.

În 8 ore se va umple bazinul. Deci:

$$8(x + y) = 1.$$

Primul curge 2 ore deci umple $2x$ părţi.
Al doilea curge $(18 + 2 = 20)$ 20 ore deci 20 y părţi.
Suma acestor părţi este egală cu un întreg.

$$2x + 20y = 1.$$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases} 8x + 8y = 1 \\ 2x + 20y = 1 \end{cases}$$

care a fost rezolvat (în u şi v) deci $x = \frac{1}{12}$, $y = \frac{1}{24}$.

Dacă într-o oră primul robinet umple $\frac{1}{12}$ din bazin, atunci întregul bazin se va umple în $1 : \frac{1}{12} = 12$ ore iar al doilea în $1 : \frac{1}{24} = 24$ (ore).

Verificare. Ambele bazine umplu într-o oră: $\frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ (din bazin); deci bazinul întreg în $1 : \frac{1}{2} = 8$ (ore); în două ore ambele, $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; în 18 ore al doilea, $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

3. *Pentru încărcarea a 9,6 tone de nisip s-au trimis mai mulţi muncitori: doi dintre ei au avut de executat altă lucrare şi de aceea fiecare din muncitorii rămaşi a trebuit să încarce cu 0,24 tone mai mult decît era prevăzut iniţial. Cîţi oameni au încărcat nisipul?*

Să notăm, de exemplu, numărul muncitorilor trimişi cu x.
Pentru exprimarea celorlalte date folosim, pentru uşurinţă, un tabel de forma.

	Cantitatea totală (în tone)	Nr. muncitorilor	Norma (în tone/m)
Planificat	9,6	x	$\frac{9,6}{x}$
Realizat	9,6	$x - 2$	$\frac{9,6}{x-2}$.

Diferenţa dintre norma realizată şi cea planificată este de 0,24 tone.

$\frac{9,6}{x-2} - \frac{9,6}{x} = 0,24$ (ecuaţia problemei)

$x \neq 0$, $x \neq 2$. (În problemă, numărul muncitorilor trebuie să fie mai mare decît 2). Eliminăm numitorii, în prealabil împărţim în ambii membri cu 0,24.

$$40x - 40\,(x - 2) = x(x - 2).$$

$$40x - 40x + 80 = x^2 - 2x \qquad \text{deci}$$

$$x^2 - 2x - 80 = 0,$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 80}, \qquad x = 1 \pm 9.$$

Ecuația are rădăcinile $x_1 = -8$, $x_2 = 10$.

Rădăcina ecuației $x = -8$ nu are sens în problemă. Rămîne $x = 10$; deci au fost 10 muncitori.

Problema mai poate fi rezolvată notînd norma planificată cu x. În acest caz norma efectuată este $x + 0,24$.

Numărul muncitorilor planificat inițial: $\frac{9,6}{x}$.

Numărul muncitorilor care au lucrat efectiv: $\frac{9,6}{x + 0,24}$.

Ecuația exprimă că numărul muncitorilor care au efectuat lucrarea a fost cu 2 mai mic decît cel planificat.

$$\frac{9,6}{x} - \frac{9,6}{x + 0,24} = 2$$

$x > 0$ deci $x \neq 0$ și $x + 0,24 \neq 0$.

$$4,8(x + 0,24) - 4,8x = x^2 + 0,24\,x,$$

$$x^2 + 0,24x - 1,152 = 0,$$

$$x = -0,12 \pm \sqrt{0,0144 + 1,152} = -0,12 \pm 1,08;\ x_1 = 0,96,\ x_2 = -1,20.$$

Norma nu poate fi negativă deci $x = 0,96$.

Numărul de oameni planificat: $9,6 : 0,96 = 10$.

Nisipul a fost încărcat de 8 oameni.

Observare. Deși raționamentul este același, se vede că, în al doilea caz, am avut calcule mai lungi, deci este preferabil să luăm ca necunoscută de bază numărul muncitorilor.

Verificare. Norma planificată pentru un muncitor este $\frac{9,6}{10} = 0,96$.

Norma efectuată de un muncitor $\frac{9,6}{8} = 1,2$.

$$1,2 - 0,96 = 0,24.$$

4. *La 6 litri spirt cu tăria de 32 grade se adaugă spirt cu tăria de 80 grade și se obține un amestec cu tăria de 40 grade. Ce cantitate de spirt s-a adăugat?*

Notăm cu x cantitatea de spirt adăugată.

Cantitatea de spirt (în litri)		Tăria în procente	Cantitatea de alcool (în litri)
Inițial	6	32%	$6 \cdot \frac{32}{100} = 1,92$
	x	80%	$\frac{80}{100}x = 0,8x$
După amestec	$6 + x$	40%	$\frac{40}{100}(6 + x) = 0,4(6 + x)$.

Cantitatea de alcool din amestec este egală cu suma cantităţilor de alcool din cele două calităţi de spirt.

$$1{,}92 + 0{,}8x = 0{,}4\ (6 + x),$$

$$0{,}4x = 0{,}48\ , \qquad x = 1{,}2.$$

Aşadar s-au adăugat 1,2 l spirt cu tăria de 80 grade.
Verificare: Cantitatea de alcool din amestec

I $\quad 6 \cdot \frac{32}{100} + \frac{80}{100} \cdot 1{,}2 = 1{,}92 + 0{,}96 = 2{,}88.$

II $\quad (6 + 1{,}2)\frac{40}{100} = 7{,}2 \cdot \frac{4}{10} = 2{,}88.$

5. *Trei băieţi au cumpărat cu 43 lei o minge. Primul băiat a dat o treime din suma pe care o avea, al doilea, care avea o sumă de două ori mai mare decît primul, a dat numai $\frac{1}{5}$ din suma pe care o avea, iar al treilea, care avea cu 5 lei mai puţin decît primul a dat $\frac{1}{4}$ din suma pe care o avea. Ce sume au avut cei trei băieţi?*

Considerăm cunoscută suma pe care a avut-o primul şi o notăm cu x deci:
primul băiat are x lei,
al doilea băiat are $2x$ lei (de două ori mai mult),
al treilea băiat are $(x - 5)$ lei (cu 5 lei mai puţin).

Sumele date de fiecare sînt: $\frac{x}{3}, \frac{2x}{5}, \frac{x-5}{4}$.

Scriem că împreună au strîns 43 lei

$$\overset{20)}{\frac{x}{3}} + \overset{12)}{\frac{2x}{5}} + \overset{15)}{\frac{x-5}{4}} = \overset{60)}{43}.$$

Am pus problema în ecuaţie. Rezolvăm ecuaţia. Eliminăm numitorii

$$20x + 24x + 15x - 75 = 2\,580,$$

$$59x = 2\,655,$$

$$x = \frac{2\,655}{59};\ x = 45.$$

Primul băiat a avut x lei deci 45 lei. Al doilea a avut $2x$ lei deci 90 lei. Al treilea a avut $(x - 5)$ lei deci 40 lei.

Verificare: $\frac{1}{3} \cdot 45 = 15; \frac{1}{5} \cdot 90 = 18; \frac{1}{4} \cdot 40 = 10.$

În total au dat $15 + 18 + 10 = 43$ (lei).

6. *Un gospodar are o răsadniţă în formă de pătrat şi socoteşte că, dacă ar pune în fiecare rînd cu 3 răsaduri mai mult şi ar mări cu 3 numărul rîndurilor, ar încăpea în răsadniţă cu 219 răsaduri mai mult. Cîte răsaduri erau iniţial pe un rînd? (Răsadurile sînt puse la aceeaşi distanţă unul de altul şi pe rînduri şi pe coloane.)*

Numărul răsadurilor pe rînd este x; numărul rîndurilor, x; numărul total al răsadurilor va fi $x \cdot x = x^2$.

Dacă mărim numărul răsadurilor avem: $(x + 3)^2$

Numărul total al răsadurilor crește cu 219 deci:

$$(x + 3)^2 - x^2 = 219.$$

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 = 219,$$

$$6x = 210, \qquad x = \frac{210}{6}, \qquad x = 35.$$

Inițial au fost 35 rînduri cu cîte 35 răsaduri.

Verificare. Inițial au fost

$$35 \times 35 = 1\,225.$$

După mărirea numărului de răsaduri

$$38 \times 38 = 1\,444.$$

S-a pus deci mai mult cu

$$1\,444 - 1\,225 = 219 \text{ (răsaduri)}.$$

7. *O brigadă de tractoriști trebuia să execute o lucrare într-un anumit număr de zile. Dacă ar fi fost cu 3 tractoriști mai puțin, lucrarea s-ar fi terminat cu 6 zile mai tîrziu, dar le-au mai sosit 2 tractoriști în plus și au terminat cu 2 zile mai devreme. Cîți membri erau la început și cîte zile le-ar fi fost necesare?*

Numărul muncitorilor din brigadă: x.

Numărul zilelor planificate: y.

Numărul de zile necesare unui singur muncitor pentru a efectua lucrarea este $x \cdot y$.

Însă $\qquad xy = (x - 3)(y + 6) = (x + 2)(y - 2).$

Avem două semne egale deci 2 ecuații:

$$1) \quad \begin{cases} (x - 3)(y + 6) = xy \\ (x + 2)(y - 2) = xy \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} 6x - 3y = 18 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases} \qquad 3) \quad \begin{cases} 6x - 3y = 18 \\ -6x + 6y = 12 \end{cases}$$

$$3y = 30$$

$$y = 10; \qquad x = y - 2, \qquad x = 10 - 2$$

$$x = 8.$$

Răspuns: inițial au fost 8 muncitori și trebuiau să lucreze 10 zile.

Verificare: inițial unui singur muncitor îi erau necesare $10 \cdot 8 = 80$ zile de muncă,

a doua oară, $16 \cdot 5 = 80$ (zile de muncă),

a treia oară, $8 \cdot 10 = 80$ (zile de muncă).

8. Se știe că: 3 *penițe*, 5 *creioane și* 4 *caiete costă* 8,75 *lei*. 5 *penițe*, 4 *creioane și* 3 *caiete costă* 7,05 *lei iar* 4 *penițe*, 3 *creioane și* 5 *caiete costă* 8,20 *lei*.

Cît costă un caiet, un creion și o peniță?

Notăm costul unei peniţe cu x, costul unui creion cu y, costul unui caiet cu z. Obţinem sistemul:

$$(1)\quad \begin{cases} 3x + 5y + 4z = 8{,}75 \\ 5x + 4y + 3z = 7{,}05 \\ 4x + 3y + 5z = 8{,}20 \end{cases}$$

care se poate rezolva prin una din metodele cunoscute (substituţie sau reducere).

Observăm însă că adunînd membru cu membru cele trei ecuaţii obţinem ecuaţie mai simplă

$$12(x + y + z) = 24 \qquad \text{deci} \qquad x + y + z = 2.$$

Înlocuim una din ecuaţiile sistemului cu această ecuaţie.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z = 7{,}05 \\ 4x + 3y + 5z = 8{,}20. \end{cases} \quad \Big| -5 \quad \Big| -4$$

Reducem pe x din prima şi a doua ecuaţie apoi din prima şi a treia şi formăm sistemul echivalent în care două ecuaţii au numai două necunoscute (y şi z).

$$\begin{cases} y + 2z = 2{,}95 \\ -y + z = 0{,}2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \qquad 3z = 3{,}15, \qquad z = 1{,}05$$

$$y = 1{,}05 - 0{,}2, \qquad y = 0{,}85$$

$$x = 2 - 1{,}90 = 0{,}10.$$

Au costat: o peniţă 0,10 lei, un creion 0,85 lei, un caiet 1,05 lei.

Verificare.

$$0{,}10 \cdot 3 + 0{,}85 \cdot 5 + 1{,}05 \cdot 4 = 0{,}30 + 4{,}25 + 4{,}20 = 8{,}75.$$

$$0{,}10 \cdot 5 + 0{,}85 \cdot 4 + 1{,}05 \cdot 3 = 0{,}50 + 3{,}40 + 3{,}15 = 7{,}05.$$

$$0{,}10 \cdot 4 + 0{,}85 \cdot 3 + 1{,}05 \cdot 5 = 0{,}40 + 2{,}55 + 5{,}25 = 8{,}20.$$

9. *După trei reduceri consecutive de preţuri cu acelaşi procent, un aparat de radio, care costa iniţial 2 000 lei, costă 1 458 lei. Cu cîte procente s-a făcut de fiecare dată reducerea?*

Notăm numărul procentelor cu x şi costul iniţial cu a_1.

Prima reducere valorează $\frac{a_1 x}{100}$ iar costul după prima reducere,

$$a_2 = a_1 - \frac{a_1 x}{100} = \frac{a_1}{100}(100 - x).$$

A doua reducere valorează $\frac{x}{100} \cdot a_2$ iar costul după a doua reducere,

$a_3 = \frac{a_2}{100}(100 - x)$ sau înlocuind pe $a_2 = \frac{a_1}{100}(100 - x)$,

$$a_3 = \frac{a_1}{100^2}(100 - x)^2.$$

A treia reducere valorează $\frac{a_3 x}{100}$ iar costul după o a treia reducere

$a_4 = a_3 - \frac{a_3 x}{100} = \frac{a_3}{100}(100 - x)$ sau înlocuind pe $a_3 = \frac{a_1}{100} \cdot (100 - x)^2$,

$$a_4 = \frac{a_1}{100^3}(100 - x)^3 \text{ sau } \frac{a_4}{a_1} = \left(\frac{100 - x}{100}\right)^3.$$

Înlocuind cu datele din problemă obținem ecuația:

$$\frac{1\,458}{2\,000} = \left(\frac{100 - x}{100}\right)^3,$$

de unde $\frac{100 - x}{100} = \sqrt[3]{\frac{1\,458}{2\,000}}$ sau simplificînd fracția $\frac{1\,458}{2\,000}$:

$$\frac{1\,458}{2\,000} = \frac{729}{1\,000} = \frac{9^3}{10^3}. \text{ Obținem:}$$

$$\frac{100 - x}{100} = \sqrt[3]{\frac{9^3}{10^3}}; \quad \frac{100 - x}{100} = \frac{9}{10}.$$

Formăm o proporție derivată:

$$\frac{100 - (100 - x)}{100} = \frac{10 - 9}{10}; \quad \frac{x}{100} = \frac{1}{10}.$$

$$x = 10.$$

Răspuns: de fiecare dată s-a făcut o reducere de 10%.

Verificare: După prima reducere: $2\,000 - \frac{10}{100} \cdot 2\,000 = 1\,800$ lei.

După a doua reducere: $1\,800 - \frac{10}{100} \cdot 1\,800 = 1\,620$ lei.

După a treia reducere $1\,620 - \frac{10}{100} \cdot 1\,620 = 1\,458$ lei.

10. *Din A pleacă un pieton spre B; din B pleacă cu o oră mai tîrziu, un pieton spre A. În momentul întîlnirii pietonul din B făcuse cu 8 km mai mult decît celălalt. După întîlnire pietonul, care a plecat din A, ajunge în B după 5 ore, iar pietonul, care a plecat din B, ajunge în A după 2 ore și 24 minute. Să se afle vitezele celor doi pietoni.*

Notînd distanța AC (de la A la punctul de întîlnire) cu x putem exprima vitezele celor doi pietoni. După întîlnire primul parcurge $(x + 8)$ km în 5 ore deci cu viteza $\frac{x + 8}{5} = v_1$.

Al doilea parcurge distanța în $2\frac{24}{60} = 2\frac{2}{5}$ ore deci cu viteza $\frac{x}{\frac{12}{5}} = \frac{5x}{12} = v_2$.

Cunoscînd distanţele şi vitezele pînă la momentul întîlnirii exprimăm timpul necesar fiecărui pieton.

$$t_1 = \frac{x}{\frac{x+8}{5}}; \qquad t_1 = \frac{5x}{x+8}; \qquad t_2 = \frac{x+8}{\frac{5x}{12}};$$

$$t_2 = \frac{12(x+8)}{5x}.$$

Pietonul din A face cu o oră mai puţin deci:

$$\frac{5x}{x+8} + 1 = \frac{12(x+8)}{5x}, \ x \neq 0, \quad x+8 \neq 0 \ (x > 0).$$

$$25x^2 + 5x^2 + 40x = 12 \ (x^2 + 16x + 64),$$

$$18x^2 - 152x - 768 = 0, \qquad 9x^2 - 76x - 384 = 0,$$

$$x = \frac{38 \pm \sqrt{1\,444 + 3\,456}}{9},$$

$$x = \frac{38 \pm 70}{9}; \qquad x_1 = 12; \qquad x_2 = -\frac{32}{9}.$$

Dar $x > 0$ deci $x = 12$. $\quad v_1 = \frac{20}{5} = 4, \quad v_1 = 4$ km/oră,

$$v_2 = \frac{5 \cdot 12}{12}, \ v_2 = 5 \text{ km/oră}.$$

Verificare. $t_1 = \frac{12}{4}, \quad t_2 = \frac{20}{5}; \quad t_2 - t_1 = 4 - 3 = 1.$

$$CB = 4 \cdot 5 = 20,$$

$$AC = 5 \cdot \frac{12}{5} = 12; \quad 20 - 12 = 8.$$

11. *Pentru strîngerea recoltei pînă la termenul planificat trebuiau să lucreze două brigăzi. Prima a lucrat pe un lot de 200 ha şi a terminat strîngerea recoltei cu o zi înainte de termenul fixat; a doua a lucrat pe un lot de 450 ha şi a terminat cu o zi după termenul fixat. Dacă prima brigadă ar fi lucrat atîtea zile cît a lucrat cea de-a doua brigadă iar a doua atîtea zile cît a lucrat prima, cele două brigăzi ar fi strîns recolta de pe două loturi de aceeaşi arie. Să se afle în cîte zile a fost planificată strîngerea recoltei.*

Notăm timpul planificat în zile cu x.

	Aria în hectare.	Timpul în zile.	Numărul de hectare lucrate pe zi.
Planificat:	650	x	
Realizat: Brigada I	200	$x - 1$	$\frac{200}{x-1}$
Brigada a II-a	450	$x + 1$	$\frac{450}{x+1}$.

Putem exprima aria de pe care ar fi strîns recolta fiecare brigadă în condițiile schimbate.

Numărul de hectare lucrate pe zi.		Timpul în zile.	Aria în hectare.
Brigada I	$\frac{200}{x-1}$	$x+1$	$\frac{200}{x-1}(x+1)$
Brigada a II-a	$\frac{450}{x+1}$	$x-1$	$\frac{450}{x+1}(x-1).$

Cele două arii sînt egale deci:

$$\frac{200}{x-1}(x+1)-\frac{450}{x+1}(x-1)=0, \qquad x>1 \text{ deci } x-1\neq 0,\ x+1\neq 0.$$

$$4(x+1)^2-9(x-1)^2=0,$$

de unde

$$(5x-1)(-x+5)=0.$$

$$x_1=\frac{1}{5} \text{ nu este soluție căci } x>1.\ x_2=5.$$

Timpul planificat a fost de 5 zile.

12. *Două mobile se mișcă uniform pe un cerc cu lungimea l pornind din același punct. Dacă merg amîndouă în același sens se întîlnesc după a minute; dacă merg în sens contrar se întîlnesc după b minute. Ce viteză au cele două mobile?*

1. Dacă mobilele merg în același sens în fiecare minut cel cu viteza mai mare parcurge mai mult un anumit arc. Ele se vor întîlni cînd diferența distanțelor parcurse devine egală cu lungimea cercului.

2. Dacă mobilele merg în sens contrar ele se întîlnesc cînd suma distanțelor parcurse este egală cu lungimea cercului.

Notăm viteza primului cu v_1 și viteza celui de al doilea cu v_2.
Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} av_1-av_2=l \\ bv_1+bv_2=l \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} v_1-v_2=\frac{l}{a} \\ v_1+v_2=\frac{l}{b} \end{cases}$$

$$2v_1=\frac{l}{a}+\frac{l}{b}; \qquad v_1=\frac{l}{2}\cdot\frac{a+b}{ab}, \quad (a\neq 0,\ b\neq 0).$$

$$2v_2=\frac{l}{b}-\frac{l}{a}, \quad v_2=\frac{l}{2}\cdot\frac{a-b}{ab}.$$

Să se calculeze vitezele în cazul $l = 210$ m, $a = 35$ minute, $b = 15$ minute.

$$v_1 = \frac{210}{2} \cdot \frac{35 + 15}{35 \cdot 15}, \quad v_1 = \frac{210}{2} \cdot \frac{50}{35 \cdot 15}, \quad v_1 = 10.$$

$$v_2 = \frac{210}{2} \cdot \frac{20}{35 \cdot 15}, \quad v_2 = 4.$$

13. *Într-un număr de trei cifre divizibil cu 9 și cu 11, numărul reprezentat prin cifra sutelor este dublul unităților iar diferența dintre acest număr și numărul obținut schimbind cifra unităților și cifra sutelor între ele este 297. Să se afle acest număr.*

Notînd cifrele cu s, z, u, numărul este

$$N = 100s + 10z + u.$$

Numărul obținut schimbînd locul cifrelor unităților și sutelor, este

$$N' = 100u + 10z + s.$$

Relațiile date sînt:

$$\begin{cases} 100s + 10z + u - 100u - 10z - s = 297, \\ s = 2u \end{cases}$$

$$\begin{cases} 99\,s - 99\,u = 297 \\ s = 2u \end{cases}, \quad \begin{cases} s - u = 3 \\ s = 2u \end{cases}, \quad \begin{cases} u = 3 \\ s = 6 \end{cases}.$$

Cifra zecilor trebuie să fie determinată prin condițiile de care nu am ținut seama.

Numărul este divizibil cu 9; dacă $(3 + 6 + z) \vdots 9$

deci $z = 0$ sau $z = 9$. Numărul poate fi:

$N_1 = 603$ sau $N_2 = 693$.

Dar $603 = 9 \cdot 67$, $693 = 3^2 \cdot 11 \cdot 7$.

Numărul căutat este 693.

Verificare. $693 \vdots 9$; $693 \vdots 11$.

$$693 - 396 = 297.$$

14. *Un număr de două cifre este de 7 ori mai mare decît suma numerelor reprezentate prin cifrele sale, iar raportul dintre acest număr și răsturnatul său (numărul obținut prin schimbarea locului cifrelor) este* $\frac{7}{6}$. *Să se afle numărul dacă*

1) *Numărul este divizibil cu 9 și cu 7.*

2) *Numărul este divizibil cu* 2^2 *și cu 7.*

Notînd cu z și u cifrele numărului, numărul este

$$N = 10z + u.$$

Relațiile date în problemă sînt:

$$\begin{cases} 10z + u = 7(z + u) \\ \dfrac{10z + u}{10u + z} = \dfrac{7}{6}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3z - 6u = 0 \\ 60z + 6u - 70u - 7z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z - 2u = 0 \\ 33z - 66u = 0, \end{cases}$$

Cele două ecuații se reduc la una singură. Toate numerele în care $z = 2u$ verifică relațiile. Aceste numere sînt: ($u < 5$, deci $u \leqslant 4$) 21; 42; 63; 84; pentru $u = 1$, $u = 2$, $u = 3$, $u = 4$.

1) Numărul divizibil cu 9 și cu 7 este $N = 63 = 9 \cdot 7$.

2) Numărul divizibil cu 2^2 și cu 7 este $N = 84 = 2^2 \cdot 7 \cdot 3$.

GEOMETRIE

I
Noțiuni introductive

Propoziții matematice

În matematică folosim următoarele propoziții:

1° *Axiomele* sînt propoziții admise fără demonstrație. De cele mai multe ori sînt stabilite pe baze experimentale și verificate în practică.

Exemplu: două cantități egale cu a treia sînt egale între ele.

2° *Definițiile* sînt propoziții prin care se introduce o noțiune nouă cu ajutorul unei noțiuni cunoscute (care cuprinde noțiunea pe care o definim ca un caz particular) și a proprietăților caracteristice noțiunii pe care o definim. Aceste proprietăți delimitează, din mulțimea elementelor noțiunii cunoscute, pe acelea care sînt cuprinse în noțiunea pe care o definim.

Exemplu. După ce s-a definit linia frîntă, definim poligonul ca linia frîntă închisă, apoi patrulaterul ca poligonul care are patru laturi, apoi paralelogramul ca patrulaterul care are laturile paralele două cîte două ș.a.m.d.

3° Teoremele sînt propoziții formate din două părți: *ipoteza* și *concluzia*. Ipoteza cuprinde anumite relații care reprezintă condițiile suficiente pentru ca relațiile din concluzie să fie satisfăcute.

A demonstra o teoremă înseamnă a stabili, prin raționament, relațiile din concluzia teoremei pe baza relațiilor din ipoteză și a unor propoziții cunoscute.

Unele propoziții sînt adevărate, altele false. Teoremele sînt propoziții adevărate; adică, dacă condițiile din ipoteză sînt îndeplinite atunci și relațiile din concluzie sînt satisfăcute (în condițiile date).

Dintr-o teoremă dată putem forma alte două propoziții care pot fi adevărate sau false: *reciproca* și *contrara* teoremei date.

Propoziția reciprocă a unei teoreme date se formează luînd ca ipoteză relațiile sau o parte din relațiile cuprinse în concluzia teoremei și drept concluzie relațiile sau o parte din relațiile cuprinse în ipoteza teoremei.

Propoziția contrară a unei teoreme se formează negînd atît ipoteza (sau o parte din ea) cît și concluzia teoremei date (sau o parte din ea). La fiecare reciprocă a unei teoreme corespunde o contrară a teoremei care se obține negînd în teorema dată rela-

ţiile pe care le-am trecut din ipoteză în concluzie şi din concluzie în ipoteză pentru a forma propoziţia reciprocă corespunzătoare.

Exemple.

1) Din *teorema*: „dacă un patrulater este înscris într-un cerc atunci unghiurile opuse sînt suplementare" se formează *reciproca*: „dacă într-un patrulater unghiurile opuse sînt suplementare atunci patrulaterul este inscriptibil (poate fi înscris într-un cerc)" şi *contrara*: „dacă un patrulater nu poate fi înscris într-un cerc atunci unghiurile opuse nu sînt suplementare". Ambele propoziţii, reciprocă şi contrară, sînt adevărate: ele sînt teoreme.

2) Din *teorema*: „dacă două unghiuri sînt drepte atunci ele sînt egale" se formează *reciproca*: „dacă două unghiuri sînt egale atunci ele sînt drepte".

Această propoziţie este falsă; există unghiuri egale care nu sînt unghiuri drepte.

Contrara: „dacă două unghiuri nu sînt unghiuri drepte atunci ele nu sînt egale". Şi această propoziţie este falsă.

3) Din teorema: „dacă un patrulater $ABCD$ este paralelogram atunci laturile opuse sînt egale două cîte două", putem forma mai multe propoziţii reciproce respectiv contrare. Scriem simbolic teorema dată.

ipoteza: 1) $AB \parallel CD$
2) $AD \parallel BC$

concluzia: 1) $AB = CD$
2) $AD = BC$

Formăm reciprocele înlocuind relaţiile sau una din relaţiile din ipoteză cu relaţiile sau una din relaţiile din concluzie:

Reciproca I. „Dacă un patrulater are laturile opuse, două cîte două egale, atunci patrulaterul este paralelogram".

ipoteza: 1) $AB = CD$
2) $AD = BC$

concluzia: 1) $AB \parallel CD$
2) $AD \parallel BC$.

Această propoziţie este adevărată, ea poate fi demonstrată.

Reciproca a II-a. „Dacă un patrulater are două laturi opuse paralele şi egale atunci patrulaterul este paralelogram".

ipoteza: 1) $AB \parallel CD$
2) $AB = CD$

concluzia: $AD \parallel BC$.

Această propoziţie este adevărată.

Reciproca a III-a. Dacă un patrulater are două laturi paralele şi celelalte două laturi egale atunci patrulaterul este paralelogram.

ipoteza: 1) $AB \parallel CD$
2) $AD = BC$

concluzia: $AD \parallel BC$.

Această propoziţie nu este adevărată, este falsă. În adevăr, există patrulatere care au două laturi paralele şi celelalte două egale care nu sînt paralelograme ci trapeze isoscele.

Din teorema dată se pot obține propozițiile contrare corespunzătoare celor trei reciproce.

Contrara I. Dacă un patrulater nu este paralelogram atunci el nu are laturile opuse egale, două cîte două.

Propoziția este adevărată.

Contrara a II-a. Dacă un patrulater are două laturi paralele și celelalte două neparalele, atunci laturile paralele sînt neegale. Propoziția este adevărată.

Contrara a III-a. Dacă un patrulater are două laturi paralele și celelalte două neparalele atunci laturile neparalele nu sînt egale.

Această propoziție este falsă.

În general, dacă ipoteza unei teoreme cuprinde mai multe relații, putem forma mai multe propoziții reciproce, unele adevărate altele false; fiecărei propoziții reciproce îi corespunde o contrară a teoremei date. O propoziție reciprocă și contrara corespunzătoare reprezintă de fapt același lucru, ele sînt sau amîndouă adevărate sau amîndouă false.

Noțiuni primare. Noțiunea care nu se definește cu ajutorul altei noțiuni, se numește noțiune primară sau fundamentală. Aceste noțiuni se introduc prin anumite proprietăți care le caracterizează și care sînt date prin axiome.

Noțiunile de *punct*, *dreaptă*, *plan* sînt noțiuni primare. Ele sînt caracterizate de următoarele proprietăți:

1) Prin două puncte trece o dreaptă și numai una. Spunem că două puncte determină o dreaptă.

2) Dreapta este nemărginită.

3) Prin trei puncte necoliniare (un punct nu se găsește pe dreapta determinată de celelalte două) trece un plan și numai unul. Spunem că trei puncte necoliniare determină un plan.

4) Planul este nemărginit și alunecă pe el însuși.

5) Dreapta care unește două puncte oarecare ale planului este conținută în plan.

6) Dacă două plane au un punct comun, ele au încă un punct comun.

Din aceste proprietăți rezultă unele consecințe:

1) Două drepte diferite au cel mult un punct comun căci, dacă ar mai avea un punct comun ele s-ar confunda.

Două drepte dintr-un plan care nu au nici un punct comun se numesc paralele. Dacă dreptele nu au nici un punct comun și nu sînt în același plan, ele sînt drepte oarecare în spațiu. Prin două drepte paralele trece un plan și numai unul.

2) Un plan mai este determinat de:

a) O dreaptă și un punct care nu aparține dreptei.

Fie dreapta d și un punct exterior M iar A și B două puncte oarecare ale dreptei d. Punctele A, B, M determină un plan (proprietatea 3) dar dreapta d, avînd două puncte comune cu planul, aparține planului (proprietatea 5).

b) Două drepte concurente.

În adevăr, fie a și b două drepte concurente în A, dreapta a și un punct B al dreptei b determină un plan. Dreapta b, avînd două puncte A și B comune cu planul, aparține planului (proprietatea 5).

3) Printr-un punct trec cîte drepte vrem; printr-o dreaptă trec cîte plane vrem.

În adevăr, un punct fix și orice punct al spațiului determină o dreaptă, o dreaptă fixă și orice punct al spațiului determină un plan.

4) Dacă două plane diferite au un punct comun atunci ele se intersectează după o dreaptă.

În adevăr, avînd un punct comun ele mai au un punct comun (proprietatea 6). Aceste două puncte determină o dreaptă care e conținută în fiecare din cele două plane deci este o dreaptă comună celor două plane (proprietatea 5). Cele două plane

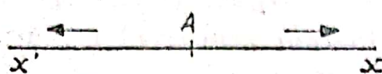


Fig. 1

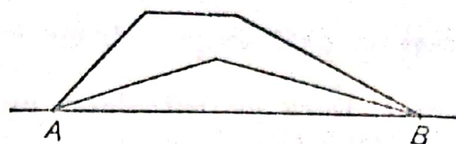


Fig. 2

nu mai pot avea comun un punct exterior acestei drepte căci, dacă ar avea comun o dreaptă şi un punct exterior dreptei, ele s-ar confunda (consecinţa a doua).

5. O dreaptă care nu e conţinută în plan poate avea cu planul cel mult un punct comun, în acest caz spunem că dreapta înţeapă planul.

Dacă dreapta nu are nici un punct comun cu planul spunem că dreapta este paralelă cu planul.

Linie, suprafaţă, corp

Orice punct A care aparţine unei drepte $x'x$ determină pe dreaptă două semidrepte cu originea în A, semidreptele Ax şi Ax' (fig. 1). Semidreapta Ax este mărginită la stînga şi nemărginită la dreapta, semidreapta Ax' este mărginită la dreapta şi nemărginită la stînga.

Două puncte oarecare A şi B care aparţin unei drepte a determină un *segment de dreaptă* (o porţiune din dreaptă), segmentul AB care are originea, punctul A şi extremitatea, punctul B.

Segmentul de dreaptă determinat de două puncte oarecare este drumul cel mai scurt dintre cele două puncte (fig. 2).

Numim linie *frîntă*, linia formată din mai multe segmente de dreaptă, puse cap la cap în direcţii diferite (fig. 3, *a*).

Numim *poligon* o linie frîntă închisă (linia frîntă în care originea primului segment coincide cu extremitatea ultimului segment) (fig. 3, *b*, *c*). Poligonul se numeşte *convex* dacă dreapta obţinută prin prelungirea oricărei laturi a poligonului nu taie poligonul (fig. 3, *b*) şi concav dacă există cel puţin o latură care prelungită taie poligonul (fig. 3, *c*).

Un poligon cu trei laturi se numeşte triunghi, cu patru, patrulater, cu cinci, pentagon, cu şase exagon, cu şapte eptagon, cu opt octogon, cu nouă nonagon, cu zece, decagon, cu douăsprezece dodecagon. Un poligon care are toate vîrfurile într-un plan este un poligon plan.

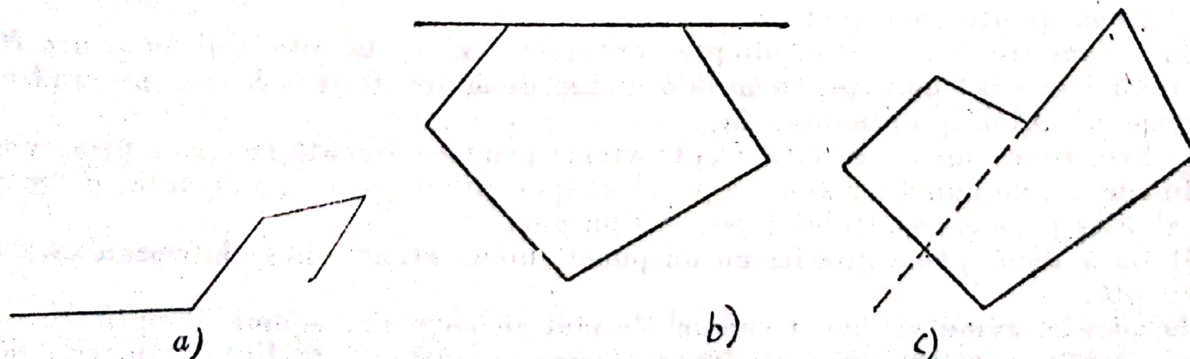


Fig. 3

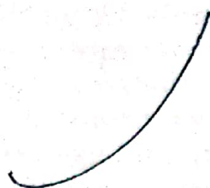


Fig. 4

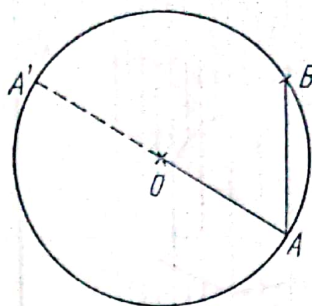


Fig. 5

O linie care nu e formată din segmente de dreaptă se numește linie curbă (fig. 4).

Un exemplu de linie curbă este cercul, linia formată din mulțimea punctelor din plan egal depărtate de un punct fix al planului numit centrul cercului.

Segmentul care unește centrul cu un punct al cercului se numește raza cercului. Segmentul care unește două puncte ale cercului se numește coardă. O coardă care trece prin centru se numește diametru. O porțiune din cerc cuprinsă între două puncte se numește arc de cerc. Două puncte A și B de pe cerc determină două arce (fig. 5).

Orice dreaptă care aparține unui plan determină două semiplane mărginite într-o parte de această dreaptă iar în cealaltă parte nemărginite.

Numim figură geometrică o mulțime de puncte, linii și suprafețe. Dacă toate punctele unei figuri sînt conținute într-un plan figura este plană, dacă punctele figurii, nu sînt situate toate într-un plan, este o figură în spațiu.

Generarea liniilor și suprafețelor

Prin mișcarea unui punct ia naștere o linie, prin mișcarea unei linii ia naștere o suprafață.

1) O dreaptă care se mișcă paralel cu o dreaptă dată și se sprijină pe o dreaptă, un poligon plan, o curbă plană generează respectiv o suprafață plană sau un plan, o suprafață prismatică (fig. 6, *a*), o suprafață cilindrică (fig. 6, *b*).

Dreapta care se mișcă se numește *generatoare* iar curba pe care se sprijină se numește *curbă directoare*.

2) O dreaptă care trece printr-un punct fix și se sprijină pe o dreaptă; un poligon plan, o curbă plană, generează respectiv o suprafață plană sau un plan; o suprafață piramidală (fig. 6, *c*); o suprafață conică (fig. 6, *d*).

3) O dreaptă care se sprijină pe două drepte concurente sau paralele generează un plan.

Un plan se desenează convențional printr-un triunghi, paralelogram sau trapez.

Observare. O suprafață este plană dacă dreapta determinată de orice pereche de puncte ale suprafeței este conținută pe suprafață.

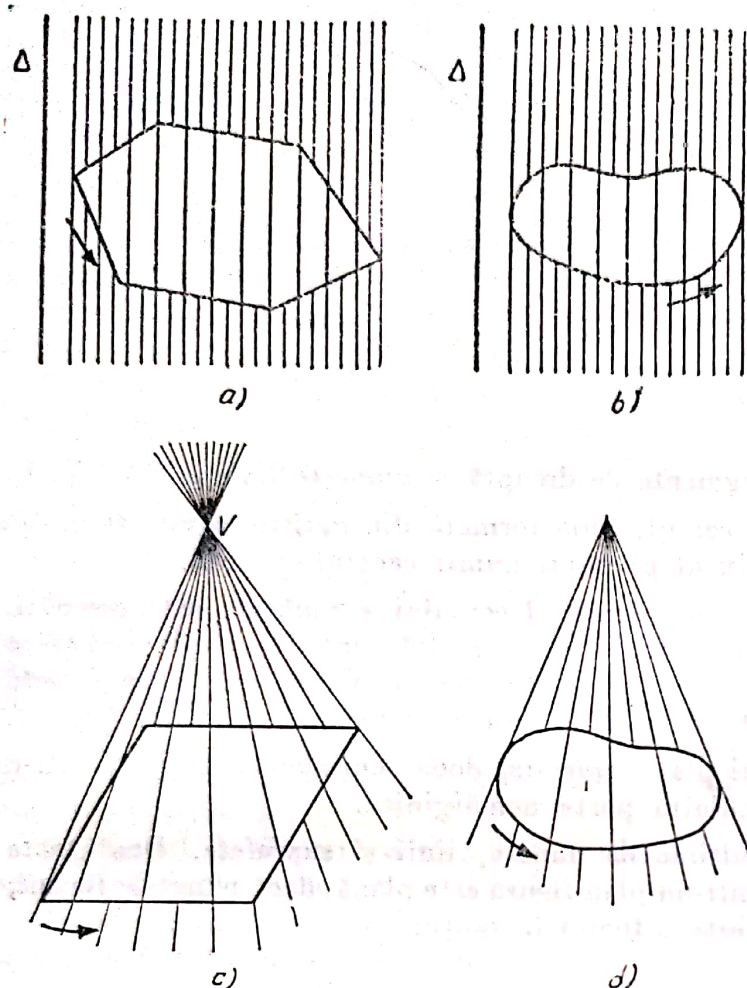


Fig. 6

Corpuri geometrice

1) *Poliedre.* Numim poliedru, un corp limitat de fețe plane. Dintre poliedre noi vom studia:

a) *Prisma* este corpul obținut prin secționarea unei suprafețe prismatice prin două plane paralele care intersectează generatoarele suprafeței și este cuprins între cele două plane și suprafața prismatică. Prisma are două baze paralele poligoane oarecare obținute prin intersecția celor două plane cu suprafața prismatică, fețele laterale sînt paralelograme. Intersecția a două fețe laterale se numește muchie. Dacă muchiile sînt perpendiculare pe bază, prisma se numește dreaptă și fețele laterale sînt dreptunghiuri (fig. 7, *a*). Prisma care are ca baze paralelograme, se numește paralelipiped. Dacă paralelipipedul drept are ca baze dreptunghiuri, el se numește paralelipiped dreptunghic.

Numim diagonală într-o prismă (sau într-un trunchi de piramidă) segmentul de dreaptă care unește un vîrf al unei baze cu un vîrf al celeilalte baze și nu este conținut într-o fată laterală a prismei (sau a trunchiului de piramidă).

b) *Piramida* este corpul obținut prin secționarea unei suprafețe piramidale cu un plan care nu trece prin vîrful piramidei și care taie toate generatoarele suprafeței.

Piramida este corpul cuprins între vîrful suprafeței, planul de secțiune și suprafață. Fețele laterale sînt triunghiuri. Perpendiculara dusă din vîrf pe bază se numește înălțimea piramidei (fig. 7, *b*).

Dacă baza este un poligon regulat și înălțimea cade în centrul acestui poligon, avem o piramidă regulată.

c) Trunchiul de piramidă se obține secționînd o piramidă cu un plan paralel cu baza (fig. 7, *c*). Fețele laterale ale trunchiului de piramidă sînt trapeze.

2) *Corpurile rotunde.* Dintre acestea vom studia: cilindrul, conul, trunchiul de con, sfera.

a) *Cilindrul*, este obținut prin secționarea unei suprafețe cilindrice cu două plane paralele care taie generatoarele suprafeței. Dacă curba de secțiune este cerc, cilindrul se numește cilindru circular. Dacă generatoarele sînt perpendiculare pe planul de secțiune, cilindrul se numește cilindru drept. Noi vom studia cilindrul circular drept și-l vom numi simplu cilindru (fig. 7, *d*).

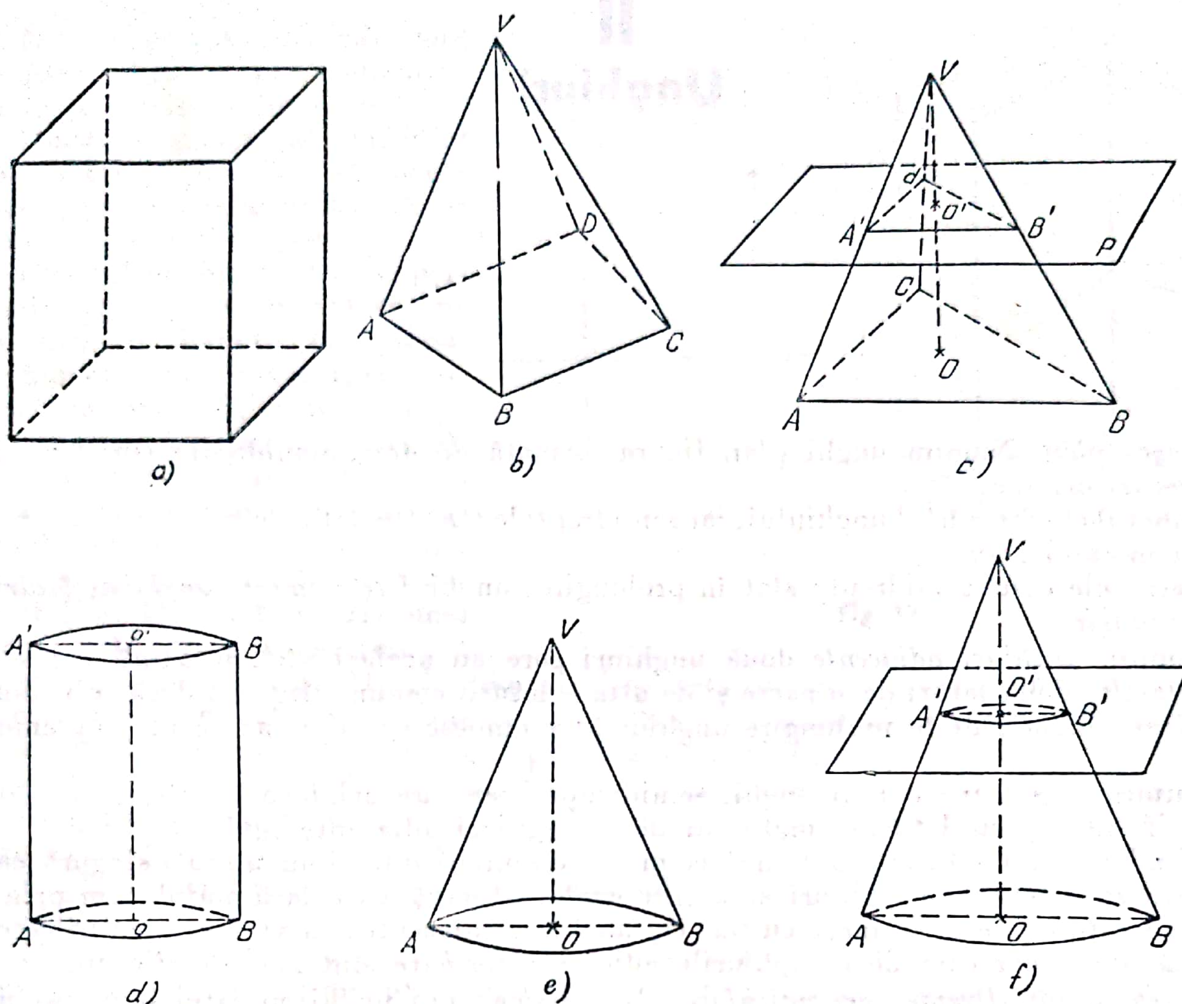


Fig. 7

b) *Conul* este obţinut prin secţionarea unei suprafeţe conice cu un plan care nu trece prin vîrful suprafeţei şi taie toate generatoarele suprafeţei. Dacă curba de secţiune este cerc, conul se numeşte con circular. Dacă înălţimea conului (perpendiculara dusă din vîrf pe planul bazei) intersectează baza în centrul cercului conul se numeşte con circular drept. Noi vom studia conul circular drept şi-l vom numi simplu con (fig. 7, *e*).

c) *Trunchiul de con* se obţine secţionînd conul cu un plan paralel cu baza (fig. 7, *f*).

d) *Sfera* este corpul geometric format din totalitatea punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct fix numit centrul sferei.

Distanţa de la centrul sferei la un punct al sferei se numeşte rază. O dreaptă are cel mult două puncte comune cu sfera: dacă are două puncte distincte comune, dreapta este secantă la sferă, dacă are două puncte confundate comune, dreapta e tangentă la sferă, dacă nu are nici un punct comun, dreapta este exterioară sferei.

Un plan poate intersecta sfera şi atunci o intersectează după un cerc. Dacă planul trece prin centrul sferei raza cercului este egală cu raza sferei. Planul poate să aibă comun cu sfera două puncte confundate (atunci el este tangent la sferă), poate să nu aibă nici un punct comun cu sfera (atunci este exterior sferei).

Două sfere pot fi secante, tangente (dacă au două puncte confundate comune), interioare sau exterioare (dacă nu au nici un punct comun).

II
Unghiuri

Unghi plan. Numim unghi plan figura formată de două semidrepte Oy, Ox care au aceeași origine.

Punctul O este vîrful unghiului, iar semidreptele Ox, Oy laturile lui; citim unghiul O sau unghiul xOy.

Dacă cele două semidrepte sînt în prelungire, unghiul se numește *unghi cu laturile în prelungire*.

Numim *unghiuri adiacente* două unghiuri care au același vîrf, o latură comună, iar celelalte două laturi de o parte și de alta a laturii comune (fig. 8); dacă cele două laturi necomune sînt în prelungire unghiurile se numesc unghiuri adiacente suplementare.

Numim *bisectoare* a unui unghi, semidreapta care are originea în vîrful unghiului și formează cu laturile unghiului două unghiuri adiacente egale.

Fiind dat un unghi xOy putem duce prin O o semidreaptă și numai una singură care să formeze cu Ox, Oy unghiuri adiacente egale. Observăm că dacă mai ducem prin O o semidreaptă care să formeze cu Ox, Oy unghiuri adiacente; ea va forma cu bisectoarea un unghi oarecare deci unghiurile adiacente formate sînt neegale (fig. 9).

Unghi drept. Drepte perpendiculare. Bisectoarea unui unghi cu laturile în prelungire formează cu laturile unghiului două unghiuri adiacente suplementare egale. Un unghi egal cu unghiul său adiacent suplementar se numește unghi drept. Semidreptele care formează un unghi drept se numesc perpendiculare. Dacă prelungim cele două semidrepte obținem două drepte care se numesc și ele perpendiculare.

Perpendiculara pe mijlocul unui segment se numește *mediatoarea* segmentului.

Într-un plan, perpendiculara într-un punct al unei drepte pe dreaptă, fiind bisectoarea unui unghi (cu laturile în prelungire), există totdeauna și este unică. Același lucru se poate spune despre perpendiculara dintr-un punct exterior (fig. 10, *a*). O semidreaptă care unește un punct exterior al dreptei (planului) cu un punct al dreptei (planului) și nu este perpendiculară pe dreaptă (plan) se numește oblică față de dreaptă (plan).

În spațiu, într-un punct al unei drepte se pot duce cîte perpendiculare vrem.

În adevăr prin dreapta dată trec cîte plane vrem, în fiecare plan se poate duce o perpendiculară pe dreaptă într-un punct al ei (fig. 10, *b*).

Toate aceste drepte sînt situate într-un plan iar dreapta dată este perpendiculară pe acest plan.

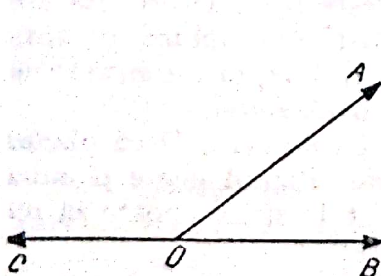


Fig. 8

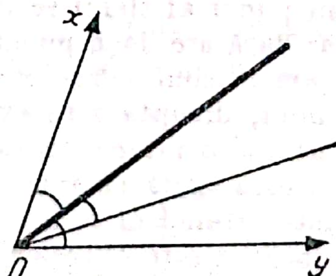


Fig. 9

Numim *dreaptă perpendiculară pe plan*, dreapta perpendiculară pe toate dreptele din plan.

Dintr-un punct al planului sau exterior planului se poate duce o singură perpendiculară pe plan și cîte oblice vrem.

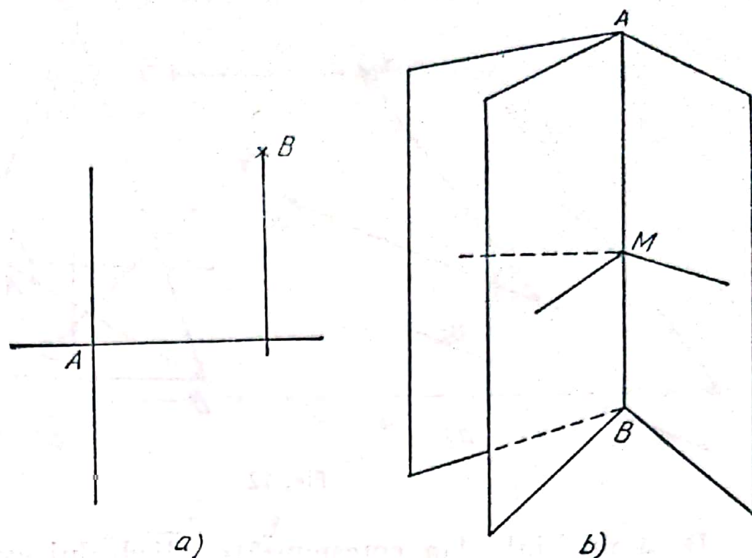


Fig. 10

Punctul de intersecție a perpendicularei pe o dreaptă sau pe un plan cu dreapta sau planul se numește piciorul perpendicularei sau proiecția punctului pe dreaptă sau pe plan (fig. 11, *a*).

Proiecția unui segment pe o dreaptă sau pe un plan este segmentul determinat de proiecțiile originei și extremității segmentului (fig. 11, *b*). Proiecția unei drepte este dreapta determinată de proiecțiile a două puncte ale dreptei: dacă dreapta intersectează dreapta (planul) pe care se face proiecția atunci proiecția ei trece prin punctul de intersecție deci este suficient să mai proiectăm un singur punct al dreptei (fig. 11, *c*).

Unghiul a două drepte în spațiu. Unghiul a două drepte, nesituate în același plan, este unghiul plan format de paralelele duse la cele două drepte printr-un punct oarecare al spațiului (fig. 12, *a*, *b*).

Unghiul unei drepte cu un plan este unghiul plan format de dreaptă cu proiecția ei pe plan (fig. 11, *c*).

Unghi diedru. Figura formată de două semiplane mărginite de aceeași dreaptă se numește unghi diedru; dreapta comună se numește muchia diedrului; cele două semiplane se numesc fețele diedrului (fig. 13).

Numim unghi plan, corespunzător unui diedru dat, unghiul format ducînd într-un punct al muchiei diedrului perpendicularele pe muchie în cele două semiplane (fig. 13).

Fie P și Q cele două semiplane și AB muchia lor comună. În punctul $M \in AB$ ducem în P dreapta $p \perp AB$ și în Q dreapta $q \perp AB$. Unghiul format de semidreptele p și q este un unghi plan și anume unghiul plan corespunzător diedrului. El este cel mai mic unghi plan, cu vîrful un punct al muchiei, format de o dreaptă din P cu o dreaptă din Q.

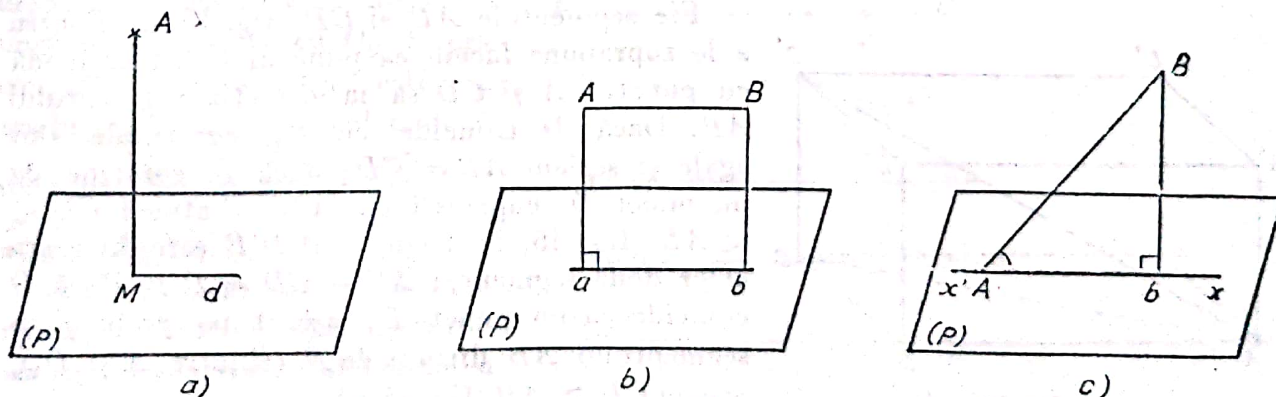


Fig. 11

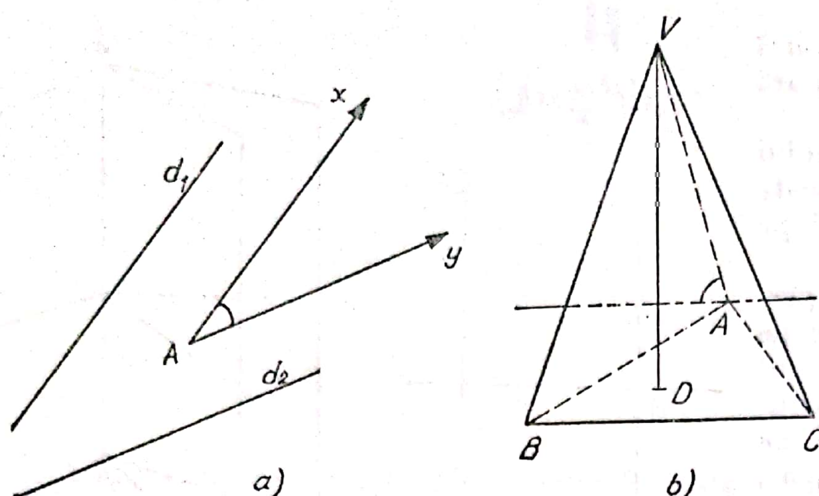


Fig. 12

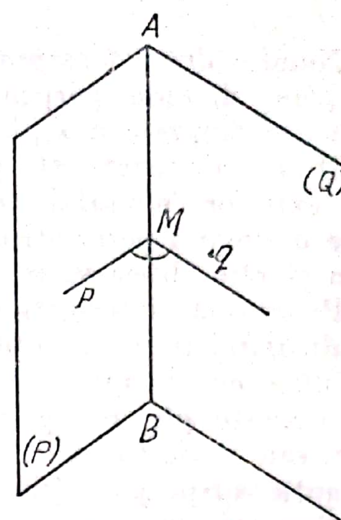


Fig. 13

Dacă unghiul plan corespunzător diedrului este drept, diedrul se numește drept și semiplanele care-l formează sînt perpendiculare unul pe celălalt.

Exemple.

1) În piramida $VABC$ (fig. 12, *b*) unghiul dintre muchia VA și latura BC este unghiul format de VA cu paralela la BC dusă prin A.

2) În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ (fig. 14), unghiul diedru format de planul bazei $ABCD$ și planul feței laterale $ABA'B'$ este unghiul $\widehat{CBB'}$ sau $\widehat{DAA'}$. Cele două unghiuri plane sînt egale, ele sînt în acest caz unghiuri drepte.

3) Unghiul format de o diagonală a unui paralelipiped dreptunghic cu planul bazei este unghiul format de această diagonală cu diagonala bazei care pornește din același vîrf.

Fie paralelipipedul dreptunghic din figura 14. Diagonala AC' se proiectează pe planul $ABCD$ după AC (diagonala bazei) deci unghiul dreptei AC' cu planul $ABCD$ este unghiul CAC'.

Operații cu segmente și cu unghiuri

Compararea a două segmente (unghiuri). Pentru a compara două segmente (unghiuri) le suprapunem; dacă coincid atunci ele sînt egale. Dacă nu coincid atunci sînt neegale, unul este mai mare ($>$) sau mai mic ($<$) decît celălalt.

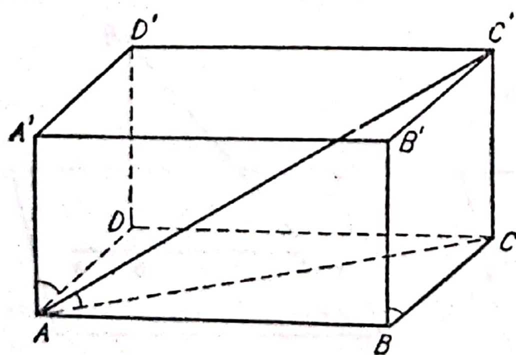


Fig. 14

Fie segmentele AB și CD (fig. 15, *a*). Pentru a le suprapune facem ca punctul C să coincidă cu punctul A și CD să ia direcția segmentului AB. Dacă D coincide cu B, segmentele sînt egale și scriem $AB = CD$; dacă D coincide cu un punct D' cuprins între A și B atunci $CD < AB$ (fig. 15, *b*). Segmentul $D'B$ este diferența celor două segmente: $AB - CD = D'B$. Dacă D coincide cu un punct D_1 așezat pe prelungirea segmentului AB dincolo de B (B între A și D_1), atunci $CD > AB$ (fig. 15, *c*).

Fiind date unghiurile xOy și $x'O'y'$, facem ca O' să coincidă cu O, semidreapta $O'x'$ să ia direcția semidreptei Ox și $O'y'$ să fie de aceeași parte a lui Ox ca și Oy. Dacă $O'y'$ ia direcția semidreptei Oy, unghiurile sînt egale (fig. 15, *a*). Dacă $O'y'$ coincide cu o semidreaptă Oy'' cuprinsă în interiorul unghiului xOy, atunci $\widehat{x'O'y'} < \widehat{xOy}$ (fig. 15, *b*); unghiul $y''Oy$ este diferența celor două unghiuri, dacă $O'y'$ coincide cu o semidreaptă Oy'' dinafara unghiului xOy, atunci $\widehat{x'O'y'} > \widehat{xOy}$ (fig. 15, *c*).

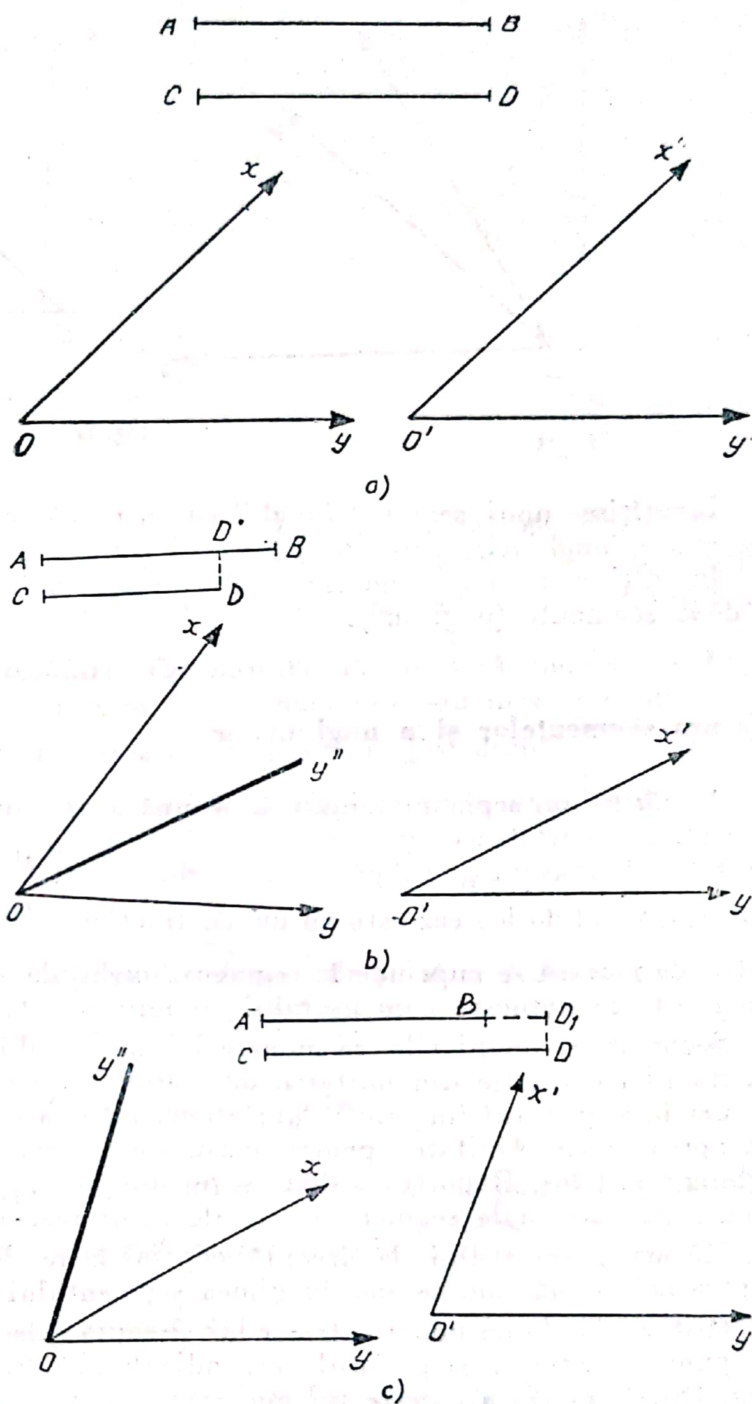


Fig. 15

Adunarea a două segmente sau unghiuri. Pentru a aduna două segmente de dreaptă AB și CD așezăm pe o semidreaptă Ox cele două segmente cap la cap astfel ca A să coincidă cu O și originea C a celui de-al doilea segment să coincidă cu extremitatea B a primului. Segmentul OD' este segmentul sumă a celor două segmente (fig. 16). Pentru a aduna două unghiuri xOy, $x'O'y'$ facem să coincidă vîrful O' cu O, semidreapta $O'y'$ să ia direcția semidreptei Oy pentru a obține două unghiuri adiacente cu Oy latură comună. Unghiul xOy'' este un unghi egal cu suma celor două unghiuri. Scriem $\widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = \widehat{xOy''}$ (fig.17).

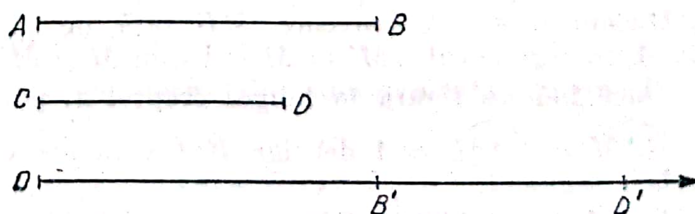


Fig. 16

Adunarea segmentelor și adunarea unghiurilor sînt comutative și asociative ca și adunarea numerelor.

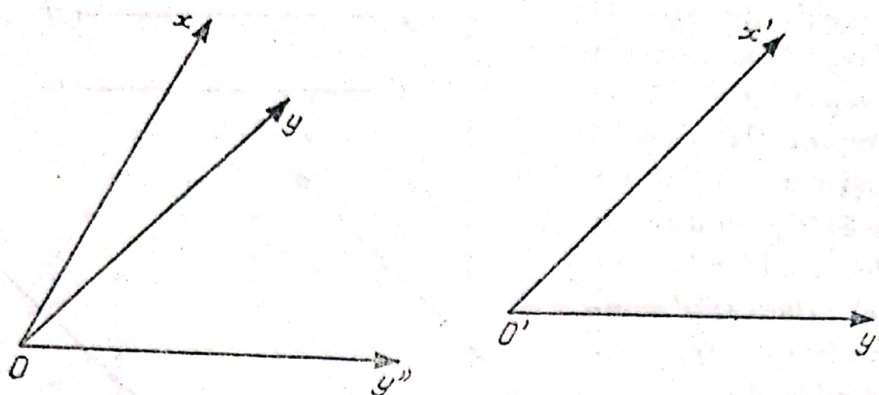


Fig. 17

Înmulţirea unui segment (unghi) cu un număr natural n se face formînd suma a n segmente (unghiuri) egale cu segmentul (unghiul) dat.

Înmulţirea cu un număr natural este distributivă faţă de adunarea sau scăderea a două segmente (unghiuri).

Măsura segmentelor şi a unghiurilor

A măsura un segment (unghi) înseamnă a găsi un număr care exprimă de cîte ori se cuprinde unitatea de măsură aleasă în segmentul (unghiul) dat sau a cîta parte din unitatea de măsură este segmentul (unghiul) dat. În primul caz măsura este un număr natural, în al doilea caz este un număr fracţionar $\frac{m}{n}$ şi arată că a n- a parte din unitatea de măsură se cuprinde în segment (unghi) de m ori. În ambele cazuri segmentul (unghiul) se numeşte comensurabil cu unitatea de măsură.

Segmentele (unghiurile) se numesc incomensurabile cu unitatea de măsură cînd nu există nici o fracţie din unitatea de măsură care să se cuprindă de un număr exact de ori în segmentul (unghiul) dat; atunci măsura segmentului (unghiului) se exprimă cu aproximaţie. Unitatea pentru măsurarea segmentelor este metrul cu multiplii şi submultiplii lui. Raportul a două segmente este raportul măsurilor lor. Numim segmente proporţionale segmentele cu ale căror măsuri se poate forma o proporţie.

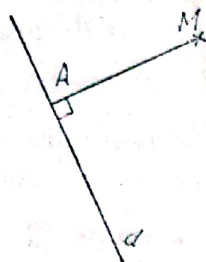
Măsura segmentului de dreaptă cuprins între două puncte se numeşte, distanţa dintre cele două puncte sau lungimea segmentului AB.

Distanţa de la un punct exterior la o dreaptă (plan) este măsura segmentului limitat de punctul exterior şi piciorul perpendicularei dusă din acest punct pe dreaptă (plan) (fig. 18). Vom arăta că este cel mai mic segment care uneşte punctul exterior cu un punct oarecare al dreptei (planului).

În adevăr, fie dreapta d, punctul exterior M şi MA perpendiculara din M pe d. Ducem o oblică oarecare MB faţă de d. Prelungim segmentul MA pornind din A cu segmentul $AM' = MA$. Unim M şi M' cu B (fig. 19).

Dacă îndoim figura în lungul dreptei d, punctul M' coincide cu M ($MA = M'A$ şi $\widehat{BAM} = \widehat{BAM'} = 1$ dr) iar BM coincide cu BM' căci două puncte determină acelaşi segment.

Dar $MM' < MB + BM'$ (segmentul MM' drumul cel mai scurt între M şi M') sau $2MA < 2MB$, de unde $MA < MB$.



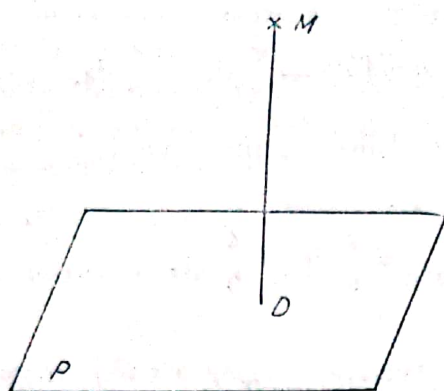


Fig. 18

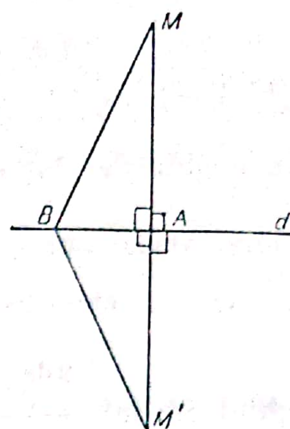


Fig. 19

În mod analog se demonstrează cînd dreapta d se înlocuiește cu planul P.

Distanța dintre două drepte paralele sau dintre două plane paralele este măsura segmentului care aparține perpendicularei pe cele două drepte (plane), limitat de cele două drepte (plane).

Unitatea de măsură pentru unghiuri. Ca unitate de măsură pentru unghiuri poate fi luat unghiul drept. Măsura unui unghi mai mic sau mai mare decît un unghi drept se va exprima printr-o fracție dintr-un unghi drept $\frac{m}{n}$ dr; m exprimînd de cîte ori se cuprinde a n-a parte din unghiul drept în unghiul dat. Dacă un unghi este obtuz (mai mare decît un unghi drept), fracția $\frac{m}{n}$ este supraunitară.

Exemple

1) *Să se calculeze suplementul unghiului* $\widehat{AOB} = \frac{3}{2}$ dr *și să se figureze grafic.*

Suma a două unghiuri suplementare este 2 dr deci

$$\widehat{BOC} = 2 \text{ dr} - \frac{3}{2} \text{dr} = \frac{1}{2} \text{ dr}.$$

Pentru a desena unghiul BOC, prelungim latura AO dincolo de punctul O (fig. 20).

2) *Să se calculeze și să se figureze complementul unghiului* $\widehat{AOB} = \frac{2}{3}$ dr.

Complementul $\widehat{BOC} = 1 \text{ dr} - \frac{2}{3} \text{dr} = \frac{1}{3}$ dr.

Pentru a desena unghiul BOC, ducem în O perpendiculara pe OA.

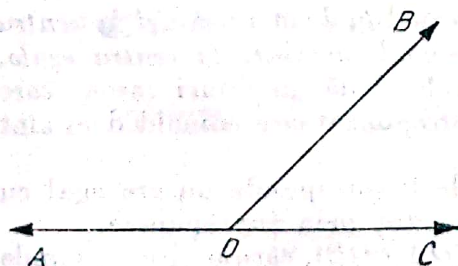


Fig. 20

3) *Să se calculeze două unghiuri complementare (suplementare) știind că unul este mai mare decît celălalt cu* $\frac{2}{3}$ dr.

Dacă unghiurile sînt complementare unghiul cel mare este

$$\frac{1 \text{ dr} + \frac{2}{3} \text{ dr}}{2} = \frac{5}{6} \text{ dr}.$$

Unghiul cel mic $\dfrac{1\ dr - \dfrac{2}{3}\ dr}{2} = \dfrac{1}{6}\ dr$ sau $1\ dr - \dfrac{5}{6}\ dr = \dfrac{1}{6}\ dr.$

Dacă unghiurile sînt suplementare unghiul cel mare va fi

$$\frac{2\ dr + \dfrac{2}{3}\ dr}{2} = \frac{8}{6}\ dr = \frac{4}{3}\ dr.$$

Unghiul cel mic $\dfrac{2\ dr - \dfrac{2}{3}\ dr}{2} = \dfrac{4}{6}\ dr = \dfrac{2}{3}\ dr$ sau $2\ dr - \dfrac{4}{3}\ dr = \dfrac{2}{3}\ dr.$

4) *Să se calculeze două unghiuri complementare (suplementare) știind că unul este: a) de 3 ori mai mare decît celălalt,* b) $\frac{3}{7}$ *din celălalt.*

a) Dacă unghiurile sînt complementare, unghiul cel mic este

$$1\ dr : 4 = \frac{1}{4}\ dr.$$

Unghiul cel mare $\dfrac{1}{4}\ dr \cdot 3 = \dfrac{3}{4}\ dr$ sau $1\ dr - \dfrac{1}{4}\ dr = \dfrac{3}{4}\ dr.$

Dacă unghiurile sînt suplementare, unghiul cel mic este

$$2\ dr : 4 = \frac{1}{2}\ dr.$$

Unghiul cel mare: $\dfrac{1}{2}\ dr \cdot 3 = \dfrac{3}{2}\ dr$ sau $2\ dr - \dfrac{1}{2}\ dr = 1\dfrac{1}{2}\ dr.$

b) Unghiurile complementare: unghiul mai mic $(1\ dr : 10) \cdot 3 = \dfrac{3}{10}\ dr$; unghiul mai mare $(1dr : 10) \cdot 7 = \dfrac{7}{10}\ dr.$

Unghiurile suplementare: unghiul cel mic $(2\ dr : 10) \cdot 3 = \dfrac{3}{5}\ dr$; unghiul cel mare $(2\ dr : 10) \cdot 7 = \dfrac{7}{5}\ dr.$

Unghiul drept (fiind prea mare) nu este o unitate convenabilă de măsură, se folosesc mai des ca unități de măsură unghiuri mai mici care depind de arcele de cerc corespunzătoare.

Într-un cerc O luăm un arc AB razele OA, OB formează un unghi cu vîrful în O care se numește unghi la centru corespunzător arcului AB.

Într-un cerc sau în două cercuri egale (care au aceeași rază) la două unghiuri la centru egale corespund arce egale și reciproc la arce egale corespund unghiuri la centru egale.

Această propoziție se demonstrează suprapunînd cele două unghiuri (arce) care fiind egale, coincid. Rezultă că arcele (unghiurile) corespunzătoare coincid deci sînt egale.

În același cerc sumei a două unghiuri la centru egale îi corespunde un arc egal cu suma celor două arce și reciproc. Demonstrația se face tot prin suprapunere.

Considerăm un unghi la centru drept, unghiul AOB ($OA \perp OB$), căruia îi corespunde arcul $\overset{\frown}{AB}$, a 90-a parte din arcul $\overset{\frown}{AB}$; se numește arc de un grad și se notează 1°.

Arcul de 1° se ia ca unitate de măsură pentru arce, iar unghiul la centru corespunzător unghiului de 1° se ia ca unitate de măsură pentru unghiuri. Această unitate de măsură are ca submultipli: minutul a 60-a parte dintr-un grad (se notează 1′) și secunda a 60-a parte dintr-un minut sau a 3600-a parte dintr-un grad (se notează 1″). Acești submultipli se numesc sexagezimali.

Observări. 1) Se mai folosesc și alte unități de măsură: gradul centezimal $\frac{1 \text{ dr}}{100}$ și submultiplii: minutul, a 100-a parte dintr-un grad, și secunda, a 100-a parte dintr-un minut.

2) Spunem că arcul AB are aceeași măsură cu unghiul AOB și scriem măs $\overset{\frown}{AB}$ = măs $\widehat{AOB}$. Nu putem spune că unghiul AOB este egal cu arcul AB căci ele nu pot fi egale nefiind mărimi de același fel.

Măsura unghiului diedru este măsura unghiului plan corespunzător diedrului.

Aplicații.

1) *Să se calculeze:*

a) $17°11'37'' + 23°45'29''$; b) $37°5'' - 22°14'13''$; c) $37°15'\,25'' \cdot 3$; d) $37°15'24'' : 3$; e) $25°18'36'' : \frac{3}{4}$; f) $5°14'35'' : 25$.

La operațiile cu numere care exprimă unități de măsură pentru arce sau unghiuri procedăm ca la operațiile cu numere zecimale ținînd însă seama că lucrăm în sistemul sexagesimal ($1° = 60'$; $1' = 60''$).

a) $17°11'37'' +$
$23°45'13''$
$40°56'66''$

$17°11'37'' + 23°45'29'' = 40°57'6''$.

b) $36°59'65'' -$
$22°14'13''$
$14°45'52''$

$37°5'' - 22°14'13'' = 14°45'52''$.

c) $37°15'25'' \cdot 3 = 111°45'75'' = 111°46'15''$.

d) $37°15'24''$ | 3
$60' + 15' = 75'$ | $12°25'8''$
$==24''$

$37°15'24'' : 3 = 12°25'8''$.

e) $25°18'36'' : \frac{3}{4} = (25°18'36'' : 4) \cdot 3$ sau

$25°18'35'' : \frac{3}{4} = (25°18'36 \cdot 3) : 4$

$25°18'36''$ | 4
$78'$ | $6°19'39''$
$156''$

; $6°19'39'' \cdot 3 = 18°57'117'' = 18°58'57''$.

sau

$$25^\circ18'36'' \cdot 3 = 75^\circ54'\,108'' = 75^\circ55'48$$

$$\begin{array}{r|l} 75^\circ55'48'' & 4 \\ \hline 180' + 55' = \underline{235'} & 18^\circ58'57'' \\ 180'' + 48'' = \underline{\underline{228''}} & \end{array} \qquad 25^\circ18'36'' : \frac{3}{4} = 18^\circ58'57''$$

f) $5^\circ14'35'' : 35.$

Pentru a efectua împărțirea, transformăm gradele în minute sau exprimăm numărul în secunde și apoi calculăm numărul minutelor de la cît.

$$\begin{array}{r|l} 314'35'' & 35 \\ \hline 34'\cdot 60 + 35' = 2075' & 8'\ 59'' \\ \underline{325'} & \\ 10' & \end{array} \qquad 5^\circ14'35'' : 35 = 8'\left(59\,\frac{2}{7}\right)''$$

sau: $(314 \cdot 60'' + 35'') : 35 = 18875'' : 35 = 8'\left(59\,\frac{10}{35}\right)'' = 8'\left(59\,\frac{2}{7}\right)''.$

2) *Să se exprime*

a) $\frac{2}{3}$ dr; $\frac{3}{7}$ dr; $1\frac{2}{5}$ dr *în grade, minute, secunde*;

b) $123^\circ14'$; $2^\circ15'16''$ *în unghiuri drepte.*

a) $\frac{2}{3}\text{ dr} = \frac{2}{3} \cdot 90^\circ = 60^\circ$; $\quad \frac{3}{7}\text{ dr} = \frac{3}{7} \cdot 90^\circ = \frac{270^\circ}{7} = 38^\circ\left(34\,\frac{2}{7}\right)''$

$$1\frac{2}{5}\text{ dr} = \frac{7}{5} \cdot 90^\circ = 126^\circ.$$

Pentru a transforma un unghi exprimat printr-un număr n de unghiuri drepte în grade minute și secunde înmulțim 90° cu numărul n.

b) $123^\circ14' = \dfrac{\left(123\,\frac{14}{60}\right)^\circ}{90^\circ}\text{ dr} = \dfrac{123\,\frac{7}{30}}{90}\text{ dr} = \dfrac{3697}{30 \cdot 90}\text{ dr} = 1\,\dfrac{997}{2700}\text{ dr}.$

Pentru simplificarea calculelor cînd unghiul dat este mai mare decît un unghi drept se poate scoate întîi numărul întreg de unghiuri drepte apoi se calculează și fracția rămasă:

$123^\circ14' = 90^\circ + 33^\circ14'$ deci

$$123^\circ14' = 1\text{ dr} + \frac{33\,\frac{7}{30}}{90}\text{ dr} = 1\,\frac{997}{2700}\text{ dr}.$$

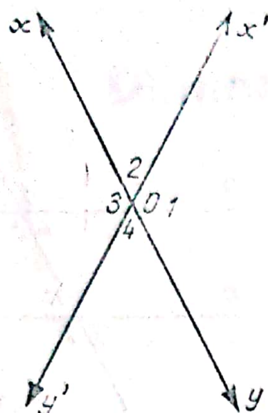


Fig. 21

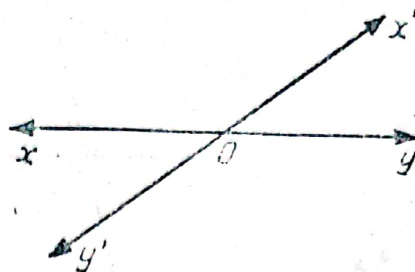


Fig. 22

Pentru a transforma un unghi dat în grade, minute și secunde în unghiuri drepte, exprimăm unghiul în grade și rezultatul îl împărțim la 90°.

$$2°15'16'' = 2° + \left(\frac{15}{60}\right)^\circ + \left(\frac{16}{3600}\right)^\circ = 2° + \left(\frac{1}{4}\right)^\circ + \left(\frac{1}{225}\right)^\circ = \left(2\frac{229}{900}\right)^\circ$$

$$2°15'16'' = \frac{\left(2\frac{229}{900}\right)^\circ}{90°}\text{ dr} = \frac{2029}{81\,000}\text{ dr.}$$

Unghiuri opuse la vîrf. Numim unghiuri opuse la vîrf, două unghiuri care au același vîrf și laturile unuia sînt în prelungirea laturilor celuilalt (fig. 21).

Teoremă. *Dacă două unghiuri sînt opuse la vîrf atunci ele sînt egale.*

Fie dreptele $x'y'$ și xy care se intersectează în punctul O, se formează patru unghiuri notate cu $\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}$ (fig. 21).

Perechile de unghiuri $(\widehat{1};\ \widehat{3}), (\widehat{2};\ \widehat{4})$ sînt opuse la vîrf, iar perechile de unghiuri $(\widehat{1}, \widehat{2})$ $(\widehat{2}, \widehat{3})$, $(\widehat{3}, \widehat{4})$, $(\widehat{4}, \widehat{1})$ sînt suplementare.

Vom avea $\widehat{1} + \widehat{2} = 2$ dr și $\widehat{2} + \widehat{3} = 2$ dr, deci $\widehat{1} = \widehat{3}$.

Aplicație. *Se dă dreapta xy. Printr-un punct O al ei se duc de o parte și de alta două semidrepte Ox', Oy' care să formeze cu xy unghiuri egale neadiacente. Să se demonstreze că semidreptele Ox', Oy' sînt în prelungire.*

Pe figura 22 avem dreapta xy, punctul O și semidreptele Ox', Oy' astfel ca $\widehat{xOy'} = \widehat{yOx'}$. Vrem să demonstrăm că Ox' și Oy' sînt în prelungire sau că semidreptele Ox', Oy' formează un unghi egal cu 2 dr.

1) $\widehat{xOy'} + \widehat{y'Oy} = 2$ dr (Ox și Oy în prelungire),

2) $\widehat{xOy'} = \widehat{yOx'}$.

Din (1) și (2) rezultă $\widehat{yOx'} + \widehat{y'Oy} = 2$ dr deci semidreptele Ox', Oy' sînt în prelungire.

Observare. Această aplicație o putem folosi pentru a demonstra că trei puncte sînt coliniare.

Exemplu. Se dau două unghiuri opuse la vîrf (unghiurile xOy și $x'Oy'$) și bisectoarele lor respectiv Oz, Oz'. Pe Oz și Oz' luăm punctele A și B. Să se demonstreze că punctele A, O, B, sînt coliniare.

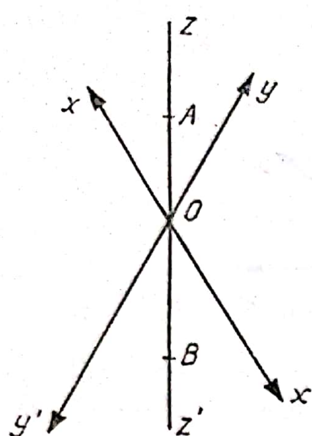
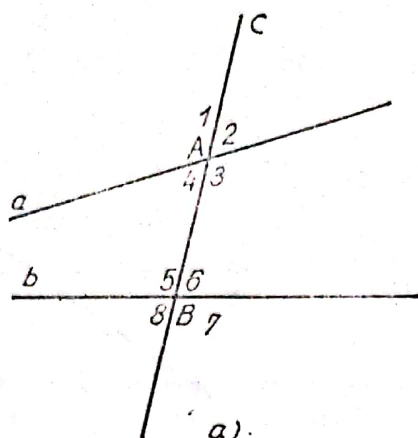


Fig. 23



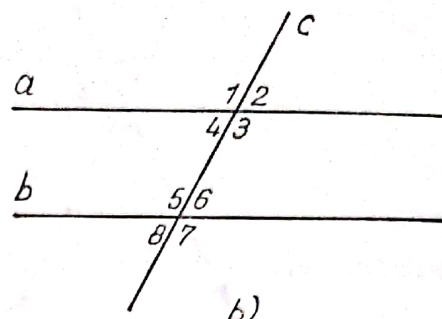


Fig. 24

Pe figura 23 avem: 1) $\widehat{xOA} = \widehat{AOy}$; 2) $\widehat{x'OB} = \widehat{BOy'}$;
3) $\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'}$ și $\widehat{xOA} = \widehat{x'OB}$ (jumătăți de unghiuri egale).

Rezultă că OA și OB formează cu semidreptele Ox, Ox' două unghiuri neadiacente egale. Deci OA și OB sînt în prelungire; punctele O, A, B sînt coliniare.

Unghiuri formate de două drepte tăiate de o a treia (de o secantă). Dacă într-un plan avem două drepte a și b, o dreaptă c care taie aceste drepte respectiv în A și B (fig. 24, a), formează cu fiecare cîte patru unghiuri. Unghiurile care se găsesc între cele două drepte a și b se numesc interne; cele dinafara celor două drepte, externe; două unghiuri așezate de o parte și de alta a secantei se numesc alterne; două unghiuri care au aceeași poziție față de cele două drepte și față de secantă se numesc corespondente. Vom avea perechile de unghiuri:

corespondente — ($\hat{1}$ și $\hat{5}$), ($\hat{4}$ și $\hat{8}$), ($\hat{2}$ și $\hat{6}$), ($\hat{3}$ și $\hat{7}$),

alterne interne — ($\hat{3}$ și $\hat{5}$), ($\hat{4}$ și $\hat{6}$),

alterne externe — ($\hat{1}$ și $\hat{7}$), ($\hat{2}$ și $\hat{8}$),

interne de aceeași parte a secantei — ($\hat{4}$ și $\hat{5}$), ($\hat{3}$ și $\hat{6}$),

externe de aceeași parte a secantei — ($\hat{1}$ și $\hat{8}$); ($\hat{2}$ și $\hat{7}$).

Teoremă. *Dacă două unghiuri alterne interne (alterne externe sau corespondente) sînt egale, atunci perechile de unghiuri alterne interne, corespondente, alterne externe sînt egale iar perechile de unghiuri interne sau externe de aceeași parte a secantei sînt suplementare.*

Considerăm unghiurile alterne interne $\hat{3}$ și $\hat{5}$ egale. Pe figura 24, b din $\hat{3} = \hat{5}$ și unghiurile suplementare formate, avem:

1) $\hat{1} = \hat{7}$ ($\hat{3} = \hat{1}$; $\hat{5} = \hat{7}$ unghiuri opuse la vîrf),

2) $\hat{2} = \hat{8}$ (suplemente de unghiuri egale $\hat{1} = \hat{7}$),

3) $\hat{4} = \hat{6}$ ($\hat{2} = \hat{4}$; $\hat{8} = \hat{6}$ opuse la vîrf),

4) $\hat{1} = \hat{5}$ (avînd suplemente egale $\hat{4} = \hat{6}$); analog $\hat{4} = \hat{8}$; $\hat{2} = \hat{6}$; $\hat{3} = \hat{7}$,

5) $\hat{4} + \hat{5} = 2$ dr ($\hat{4} + \hat{3} = 2$ dr și $\hat{3} = \hat{5}$); analog $\hat{3} + \hat{6} = 2$ dr,

6) $\hat{1} + \hat{8} = 2$ dr ($\hat{1} + \hat{4} = 2$ dr dar $\hat{4} = \hat{8}$); analog $\hat{2} + \hat{7} = 2$ dr.

În mod analog se demonstrează aceste relații pornind de la oricare din relațiile 1 — 6.

III
Demonstrarea teoremelor

Pentru a demonstra că „două drepte diferite au cel mult un punct comun“ am raționat astfel: presupunem că există două drepte diferite care au două puncte comune, dar acest lucru nu e posibil căci prin două puncte trece o singură dreaptă. Am tras concluzia că propoziția dată este adevărată pentru că propoziția pe care am format-o noi prin negarea propoziției date este falsă.

Această metodă de raționament se numește *metoda reducerii la absurd.*

Pentru a demonstra o teoremă dată formăm o nouă propoziție prin care negăm teorema dată. Dacă ajungem la o relație care contrazice ipoteza teoremei date sau o propoziție stabilită anterior, deci la un rezultat absurd, atunci teorema dată este demonstrată.

Să aplicăm această metodă la demonstrarea teoremei: *Într-un plan se poate duce o singură perpendiculară pe o dreaptă într-un punct al ei.*

Negăm această propoziție. „Nu e adevărat că într-un plan se poate duce o singură perpendiculară pe o dreaptă a planului într-un punct al ei, sau: „există cel puțin un punct M pe o dreaptă d astfel încît, într-un plan care conține dreapta d să se ducă în M două perpendiculare pe d.

Cele două perpendiculare ar fi bisectoare ale unghiului cu vîrful în M și laturile în prelungire ceea ce este absurd căci un unghi are o singură bisectoare. Așadar în punctul M nu se pot duce două perpendiculare pe d în planul dat.

Unele teoreme pot fi demonstrate prin simetria unei figuri față de un punct sau față de o dreaptă din plan.

Simetria în plan, față de un punct

Într-un plan, două puncte A și B sînt *simetrice față de un punct O* numit centru de simetrie dacă:

1) punctele A,O,B sînt coliniare și O situat între A și B.
2) $OA = OB$ (fig. 25).

O figură are un *centru de simetrie*, dacă fiecare punct al ei are simetricul față de acest centru tot pe figură. De exemplu, centrul unui cerc este centrul de simetrie al cercului.

Simetria în plan, față de o dreaptă

Într-un plan două puncte A și B sînt *simetrice față de o dreaptă d* a planului numit *axă de simetrie* dacă:

1) $AB \perp d$,

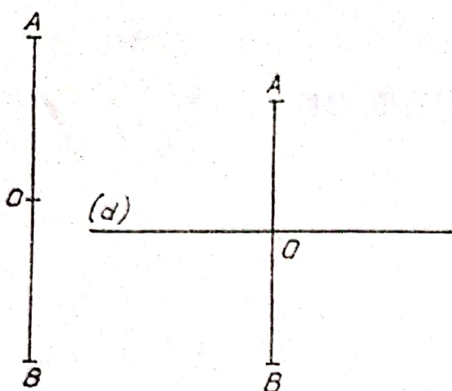


Fig. 25 Fig. 26

2) punctele A, B sînt simetrice față de intersecția dreptei AB cu d ($AO = OB$), A și B fiind de o parte și de alta a dreptei d (fig. 26).

Dacă toate punctele unei figuri au simetricele față de aceeași dreaptă situate pe figură, atunci figura are o axă de simetrie. Din cele spuse reiese că, dacă îndoim figura în lungul axei de simetrie cele două părți ale figurii, prin suprapunere, coincid (fig. 27).

Exemple de figuri cu axe de simetrie.

1) Mediatoarea unui segment AB este axa de simetrie a segmentului.

Îndoind figura în lungul mediatoarei cele două segmente determinate pe AB de mijlocul lui coincid prin suprapunere.

2) Bisectoarea unui unghi este axa de simetrie a acestui unghi.

În adevăr, bisectoarea formînd cu laturile unghiului unghiuri adiacente egale, prin îndoirea figurii în lungul bisectoarei, cele două laturi ale unghiului prin suprapunere, coincid.

3) Într-un triunghi cu două laturi egale (triunghi isoscel), bisectoarea unghiului format de laturile egale este axa de simetrie a triunghiului, ea este deci și mediană, și înălțime și mediatoarea laturii opuse.

În adevăr, fie ABC un triunghi isoscel (fig. 28) și AD bisectoarea unghiului BAC. Bisectoarea AD este axa de simetrie a unghiului BAC deci prin îndoirea figurii în lungul bisectoarei, semidreapta AC ia direcția semidreptei AB; dar $AB = AC$ deci punctul C coincide cu punctul B. Triunghiurile ABD și ACD prin suprapunere coincid, deci vom avea și:

1) $DB = DC$; 2) $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$.

Unghiurile ADB și ADC, fiind unghiuri adiacente suplementare egale, sînt unghiuri drepte deci B este simetricul lui C față de AD. Deci $DB = DC$ și $AD \perp BC$. Din egalitatea triunghiurilor rezultă și $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. Într-un triunghi isoscel unghiurile de la bază sînt egale.

Unele figuri nu au axe de simetrie, de exemplu, un triunghi care nu are două laturi egale nu are axă de simetrie. Unele figuri au mai multe axe de simetrie. De exemplu triunghiul care are toate laturile egale (triunghiul echilateral) are trei axe

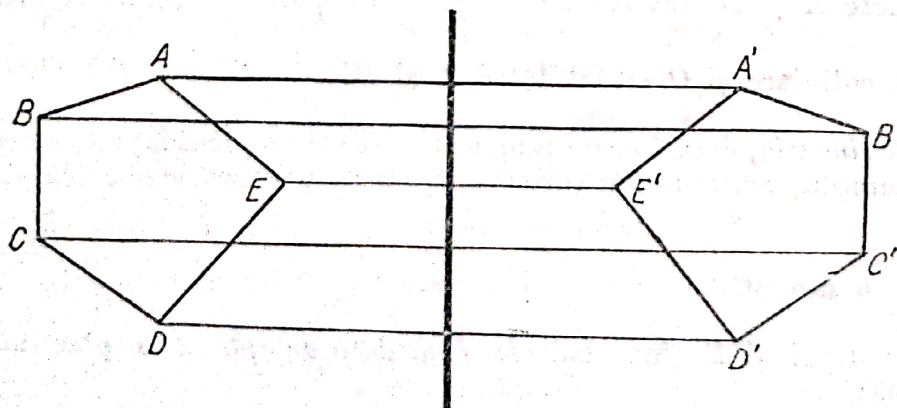


Fig. 27

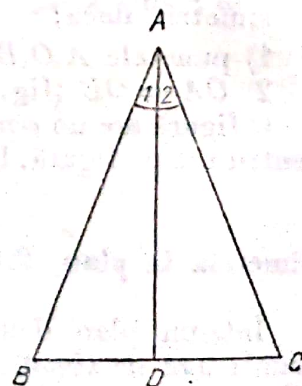


Fig. 28

de simetrie (fiind de trei ori isoscel). În acest caz unghiurile alăturate fiecărei laturi sînt egale deci cele trei unghiuri ale triunghiului echilateral sînt egale.

O altă metodă folosită des în demonstrarea unor teoreme în care ni se cere să dovedim că există două segmente sau două unghiuri egale este *metoda triunghiurilor egale*.

Această metodă se bazează pe teoremele (numite și cazurile de egalitate a triunghiurilor) care cuprind condiții suficiente ca două triunghiuri să fie egale.

Cazul I. Dacă două triunghiuri au cîte o latură și unghiurile alăturate ei respectiv egale, atunci triunghiurile sînt egale.

Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$ în care prin ipoteză:

$$AB = A'B';\ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \text{ și } \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \text{ (fig. 29).}$$

Suprapunem triunghiul $A'B'C'$ peste triunghiul ABC astfel ca A' să coincidă cu A; segmentul $A'B'$ să ia direcția segmentului AB, punctul C' să fie de aceeași parte a segmentului AB ca și punctul C. Pe baza ipotezei vom avea: punctul B' coincide cu B ($AB = A'B'$), segmentele $A'C'$ și $B'C'$ iau respectiv direcțiile segmentelor AC, BC ($\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ și $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$). Cum două drepte diferite au un singur punct comun, C' coincide cu C. Prin suprapunere cele două triunghiuri au coincis. Rezultă că și celelalte elemente corespunzătoare sînt egale.

1) $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$; 2) $AC = A'C'$; $CB = C'B'$ deci

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'.$$

Cazul II. Dacă două triunghiuri au două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv egale, atunci ele sînt egale.

Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$ (fig. 30). Din ipoteză avem:

$$AB = A'B';\ AC = A'C' \text{ și } \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}.$$

Suprapunem, ca în cazul precedent, segmentul $A'B'$ peste segmentul AB astfel ca C' să fie de aceeași parte a lui AB ca și C; $A'C'$ coincide cu AC ($\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

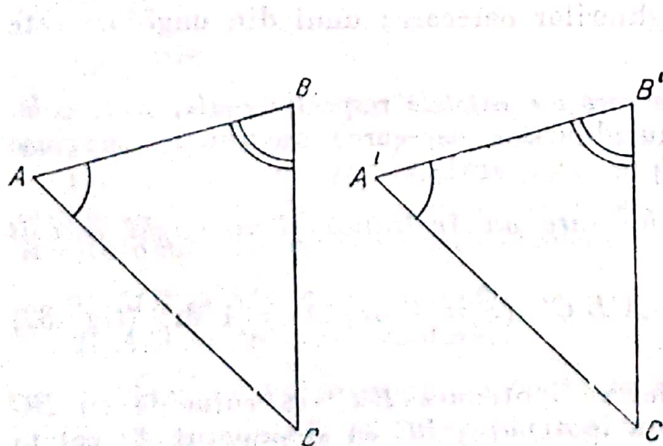


Fig. 29

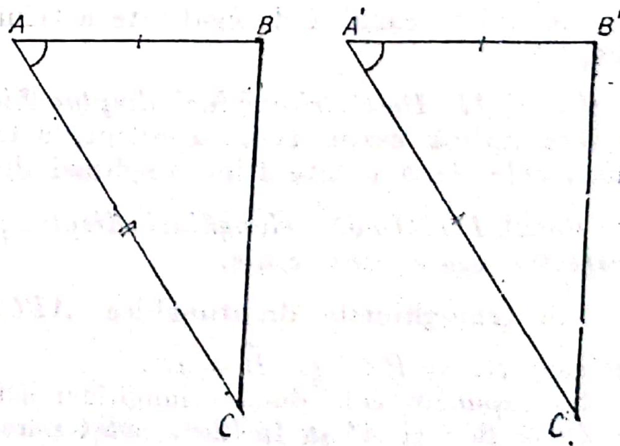


Fig. 30

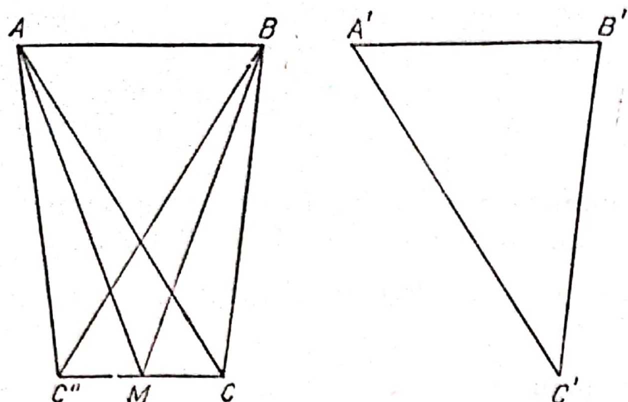


Fig. 31

și $AC = A'C'$) deci C' coincide cu C. Cele două triunghiuri coincid prin suprapunere. Vom avea și:

1) $BC = B'C'$; 2) $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$;
3) $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ deci $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Cazul III. Dacă două triunghiuri au laturile respectiv egale, atunci ele sînt egale.

Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$. Din ipoteză avem:

$$AB = A'B'; \quad AC = A'C'; \quad BC = B'C' \text{ (fig. 31).}$$

Suprapunem cele două triunghiuri astfel încît AB să coincidă cu $A'B'$ ($AB = A'B'$) și punctul C' să fie de aceeași parte a segmentului AB ca și C. Nu putem ști ce direcții vor lua segmentele $A'C'$ și $B'C'$ pentru că nu știm nimic despre unghiurile corespunzătoare din cele două triunghiuri. Folosim metoda reducerii la absurd. Nu e adevărat că cele două triunghiuri sînt egale, adică există două triunghiuri cu laturile respectiv egale care nu sînt egale. Atunci punctul C' va coincide cu un punct C'' diferit de C. Pe figură se vede că, în acest caz, triunghiurile ACC'' și BCC'' avînd cîte două laturi egale, sînt isoscele. Fiecare dintre ele are cîte o axă de simetrie care este și mediatoare a segmentului CC''. Notînd cu M mijlocul segmentului CC'' rezultă: $MA \perp CC''$ și $MB \perp CC''$. Negînd teorema dată am ajuns la afirmația că într-un plan putem duce într-un punct al unei drepte două perpendiculare pe dreaptă ceea ce știm că e fals.

Punctul C'' nu poate fi diferit de punctul C. Unghiurile corespunzătoare (care se opun laturilor respectiv egale) sînt egale două cîte două.

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'.$$

În cazul triunghiurilor dreptunghice vom avea două cazuri de egalitate, consecințe ale cazurilor de egalitate a triunghiurilor oarecare și două cazuri care se demonstrează special.

Cazul I. Două triunghiuri dreptunghice care au cîte o catetă și unghiul ascuțit alăturat catetei respectiv egale, sînt egale.

(Se aplică cazul I de egalitate a triunghiurilor oarecare; unul din unghiuri este drept.)

Cazul II. Două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv egale, sînt egale.

(Se aplică cazul II de egalitate a triunghiurilor oarecare, unghiurile cuprinse între cele două catete fiind unghiuri drepte, sînt egale.)

Cazul III. Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuza și un unghi ascuțit respectiv egale sînt egale.

Fie triunghiurile dreptunghice ABC, $A'B'C'$ ($\hat{A} = 1$ dr; $\hat{A}' = 1$ dr) (fig. 32) în care $BC = B'C'$ și $\hat{B} = \hat{B}'$.

Suprapunem cele două triunghiuri astfel ca ipotenuza $B'C'$ să coincidă cu BC ($B'C' = BC$) și A' să fie de aceeași parte a ipotenuzei BC ca și punctul A; cateta $B'A'$ ia direcția catetei BA ($\hat{B} = \hat{B}'$). $A'C'$ este perpendiculară pe $B'A'$ în A'.

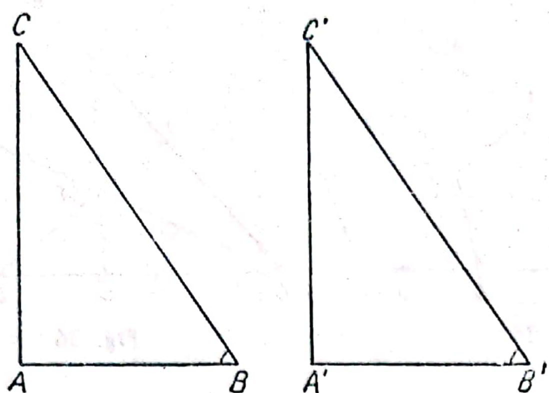


Fig. 32

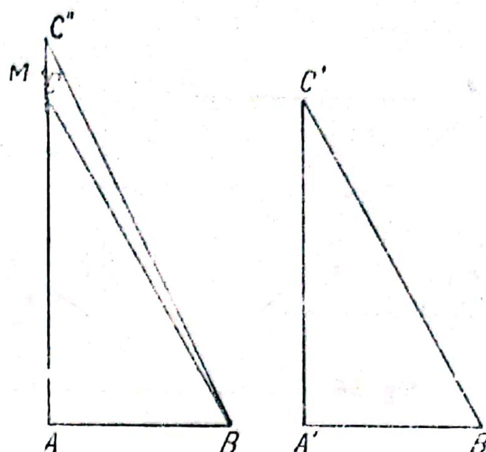


Fig. 33

Dar în planul triunghiului ABC din C nu se poate duce decît o perpendiculară pe AB; $A'C'$ coincide cu AC. Cele două triunghiuri coincid prin suprapunere deci $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Cazul IV. Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuza și cîte o catetă respectiv egale, sînt egale.

Fie ABC și $A'B'C'$ cele două triunghiuri în care $\widehat{A} = 1$ dr; $\widehat{A'} = 1$ dr; $BC = B'C'$ și $AB = A'B'$ (fig. 33).

Suprapunem cele două triunghiuri astfel încît cateta $A'B'$ să coincidă cu AB, C' să fie de aceeași parte a segmentului AB ca și C, $A'C'$ ia direcția semidreptei AC. Nu putem afirma nimic despre $C'B'$ căci nu știm dacă $\widehat{C'} = \widehat{C}$. Folosim metoda reducerii la absurd. Există două triunghiuri în condițiile date pentru care $C'B'$ nu ia direcția dreptei CB ci intersectează AC în $C'' \neq C$. S-a format triunghiul isoscel CBC'' care are ca axă de simetrie, bisectoarea unghiului CBC'' (BM) care este și mediatoarea segmentului CC''. Ar urma că din B se pot duce în planul triunghiului două perpendiculare pe AC ($BM \perp AC$; $CA \perp AB$) ceea ce este absurd. Punctul C'' trebuie să coincidă cu C și avem $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Metoda triunghiurilor egale se aplică la demonstrarea egalității unor segmente sau a unor unghiuri. Se încadrează aceste segmente sau unghiuri în două triunghiuri a căror egalitate o putem stabili prin unul din cazurile de egalitate a triunghiurilor studiate.

Aplicație

1) *În triunghiul ABC se unește punctul B cu mijlocul M al laturii AC și se prelungește dincolo de M cu un segment $MD = BM$. Să se demonstreze că $AD = BC$.*

Fie triunghiul ABC (fig. 34), iar M mijlocul segmentului AC. Vrem să demonstrăm că $AD = BC$. Încadrăm aceste segmente în două triunghiuri MAD și MCB. Aceste două triunghiuri au ca elemente egale:

1) $MB = MD$ (din ipoteză),

2) $AM = MC$ (din ipoteză),

3) $\widehat{BMC} = \widehat{AMD}$ (unghiuri opuse la vîrf).

Pe baza cazului II de egalitate a triunghiurilor rezultă

$$\Delta AMD = \Delta BMC.$$

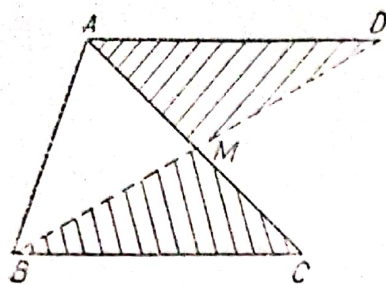


Fig. 34

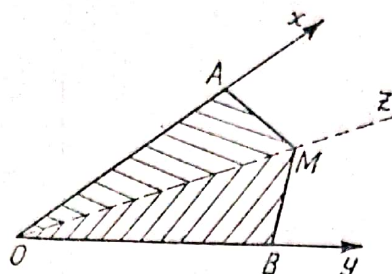


Fig. 35

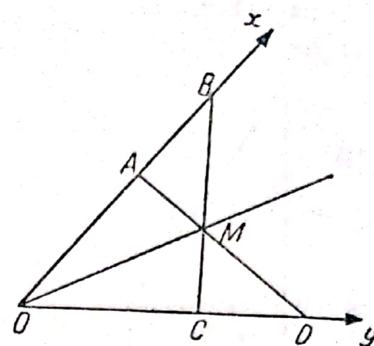


Fig. 36

În triunghiurile egale AMD și BMC la unghiuri egale ($\widehat{BMC}$ și $\widehat{AMD}$) se opun laturi egale: $AD = BC$.

2) *Se dă un unghi xOy și bisectoarea Oz a unghiului. Pe Oz se ia un punct oarecare M și se duc perpendicularele MA, MB respectiv pe Ox, Oy. Să se demonstreze că $MA = MB$.*

Fie unghiul xOy, bisectoarea Oz (fig. 35) și $M \in Oz$. Ducem $MA \perp Ox$; $MB \perp Oy$. Încadrăm MA și MB în triunghiurile OMA și OMB care au elementele egale:

1) $\hat{A} = \hat{B} = 1$ dr, 2) OM latură comună, 3) $\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$ (OM bisectoarea unghiului xOy). Deci cele două triunghiuri sînt dreptunghice și au ipotenuza și un unghi ascuțit respectiv egale. Pe baza cazului III de egalitate a triunghiurilor dreptunghice: $\Delta OBM = \Delta OAM$.

În triunghiurile egale OBM și OAM la unghiuri egale ($\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$) se opun laturi egale: $MA = MB$.

3) *Pe laturile unui unghi xOy se iau punctele A și B pe Ox, C și D pe Oy astfel încît $OA = OC$ și $OB = OD$. Să se demonstreze că punctul de intersecție a dreptelor AD și BC se găsește pe bisectoarea unghiului xOy.*

Fie unghiul xOy (fig. 36) punctele A, B, C, D și M punctul de intersecție a dreptelor AD și BC.

Vrem să demonstrăm că $\widehat{AOM} = \widehat{MOC}$. Aceste unghiuri fac parte din triunghiurile OAM și OMC; ele sînt egale dacă aceste triunghiuri sînt egale. Triunghiurile OAM și OMC au două laturi egale: OM latură comună și $OA = OC$ din ipoteză, ele vor fi egale dacă și $AM = MC$. Pentru a demonstra că $AM = MC$ putem considera triunghiurile MAB și MCD care au $AB = CD$ (diferențe de segmente egale). Triunghiurile MAB și MCD sînt egale dacă $\widehat{OBC} = \widehat{ADO}$ și $\widehat{BAM} = \widehat{MCD}$. Unghiurile ABM și MDC fac parte din triunghiurile OBC și OAD care au elemente egale:

1) $OB = OD$ (din ipoteză), 2) $OC = OA$ (din ipoteză), 3) $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$ (comun).
$\Delta OBC = \Delta OAD$ (cazul II) deci avem și: 3 $\widehat{OBC} = \widehat{ADO}$ ($OC = OA$),
4) $\widehat{OCB} = \widehat{OAD}$ ($OB = OD$).

Din 4) rezultă 4') $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$ (au suplemente egale).

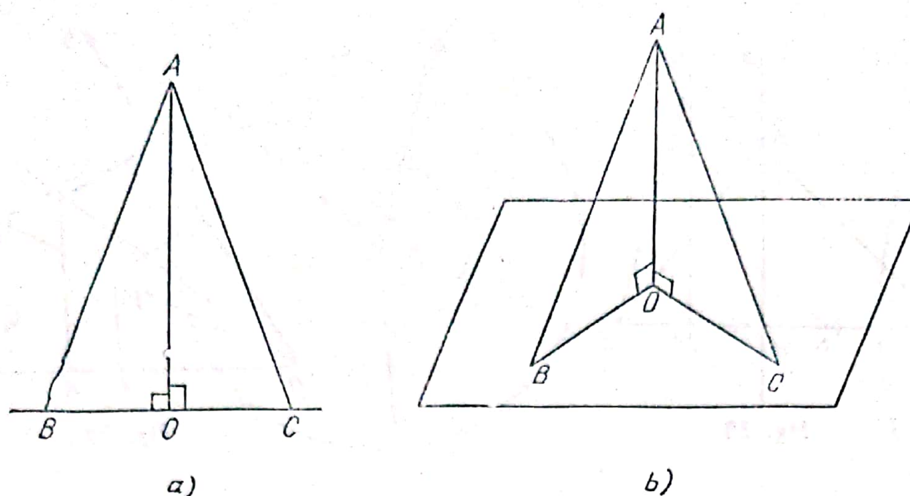


Fig. 37

Triunghiurile AMB şi CMD sînt egale ($AB = CD$ şi relaţiile 3 şi 4) deci $MA = MC$ (se opun la unghiuri respectiv egale).

Triunghiurile OAM şi OMC sînt egale ($OM = OM$; $OA = OC$; $MA = MC$) deci $\widehat{AOM} = \widehat{MOC}$. Punctul M este pe bisectoarea unghiului xOy.

4) *Dacă dintr-un punct ducem perpendiculara pe o dreaptă (plan) şi două oblice egale atunci oblicele au picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei şi reciproc dacă două oblice, duse din acelaşi punct pe o dreaptă (plan) au picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei duse din acelaşi punct pe dreaptă (plan), atunci oblicele sînt egale.*

a) Fie AO perpendiculara pe dreaptă (plan) şi oblicele $AB = AC$ (fig. 37).

Triunghiurile ACO şi AOB sînt egale fiind triunghiuri dreptunghice şi $AB = AC$ (din ipoteză) şi AO comună. Rezultă $OC = OB$.

b) Fie oblicele AC, AB, perpendiculara AO (fig. 37) şi $OB = OC$. $\Delta AOC = \Delta AOB$ (triunghiuri dreptunghice şi $OB = OC$; AO comună).

Rezultă: $AB = AC$.

Uneori trebuie să demonstrăm că toate punctele unei figuri F se bucură de o anumită proprietate şi că nici un punct care nu aparţine figurii nu se bucură de această proprietate. Spunem că figura F este *locul geometric* al punctelor care se bucură de proprietatea dată. Pentru a demonstra că o figură este locul geometric cerut trebuie să demonstrăm ambele proprietăţi, directa şi contrara ei.

Exemple

1) *Mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor egal depărtate de extremităţile segmentului.*

a) Punctele mediatoarei unui segment sînt egal depărtate de extremităţile lui.

Fie AB segmentul dat, $M \in AB$, $MA = MB$ şi $d \perp AB$ în M. Considerăm un punct oarecare $N \in d$ (fig. 38). Vrem să demonstrăm că $NA = NB$. Triunghiurile AMN şi BMN sînt dreptunghice egale avînd catetele respectiv egale. Deci $NA = NB$.

b) Fie N' un punct care nu aparţine mediatoarei, trebuie să demonstrăm că $N'A \neq N'B$ (fig. 38). Ducem $N'M' \perp AB$. Dacă $N'A = N'B$, atunci $\Delta AM'N' = \Delta N'M'B$ (avînd o catetă comună şi ipotenuzele egale). Rezultă $M'A = M'B$ ceea ce nu se poate decît dacă $N' \in d$.

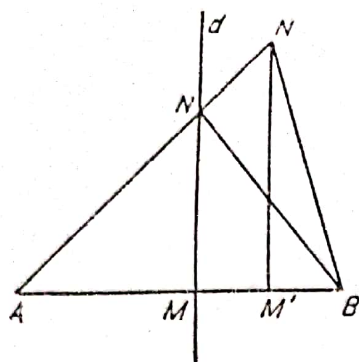


Fig. 38

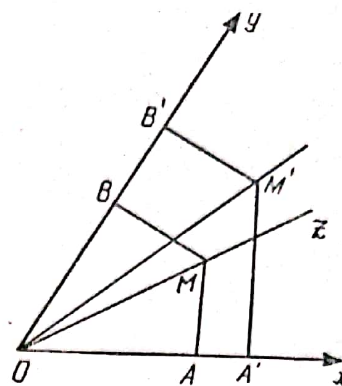


Fig. 39

2) *Bisectoarea unui unghi este locul geometric al punctelor egal depărtate de semidreptele care formează laturile unghiului.*

a) Punctele bisectoarei Oz a unghiului xOy sînt egal depărtate de laturile unghiului. Fie un punct $M \in Oz$. Ducem $MA \perp Ox$, $MB \perp Oy$ (fig. 39). $\Delta OMA = \Delta MOB$ (avînd ipotenuza comună și un unghi ascuțit egal $\widehat{AOz} = \widehat{zOy}$). Rezultă:

$$MA = MB.$$

b) Fie M' un punct interior unghiului xOy care nu aparține bisectoarei. Trebuie să demonstrăm că distanțele lui la laturile unghiului sînt neegale (fig. 39). Ducem $M'A' \perp Ox$, $M'B' \perp Oy$. Triunghiurile $OM'A'$ și $OM'B'$ sînt egale dacă $M'B' = M'A'$ căci au ipotenuza comună. Rezultă $\widehat{A'OM'} = \widehat{M'OB'}$. Deci OM' este bisectoarea unghiului ceea ce nu este posibil decît dacă $M' \in Oz$.

Rotația. O altă metodă folosită uneori în demonstrarea unei teoreme este rotația în jurul unui punct numit *centru de rotație* sau în jurul unei axe numită *axă de rotație.*

În plan, un punct A al unei figuri F se rotește în jurul unui punct O numit *centru de rotație*, de un unghi dat α, dacă descrie un arc de cerc cu centrul în O și raza OA avînd măsura unghiului α. Punctul B este obținut prin rotația punctului A cu centrul O și unghiul α dacă $OA = OB$ și $\widehat{AOB} = \alpha$ (fig. 40, *a*).

Observație. Pentru a roti mai multe puncte ale unei figuri trebuie ca arcele de rotație să păstreze același sens.

De exemplu pe cercul O luăm punctele A, B, C, D astfel ca $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. Rotind arcul AB în jurul lui O de unghiul AOC, punctul A coincide cu C iar B coincide cu D pentru că $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ și prin suprapunere coincid (fig. 40, *b*).

Cu ajutorul rotației se pot demonstra unele din teoremele relative la arce și coarde în cerc. În exemplul precedent am demonstrat că într-un cerc (sau în două cercuri egale) la arce egale corespund coarde egale.

Un punct se rotește în jurul unei drepte de un unghi α dacă descrie un arc de cerc care are ca măsură, măsura unghiului α și centrul, punctul de intersecție a axei cu perpendiculara dusă din punct pe dreaptă. Dacă unghiul α este egal cu 180° atunci punctul M și punctul M', obținut prin rotirea de unghiul α a punctului M în jurul unei drepte d, sînt simetrice față de axa de rotație. Dacă $\alpha = 360°$, punctul M prin rotație se transformă în el însuși (fig. 41).

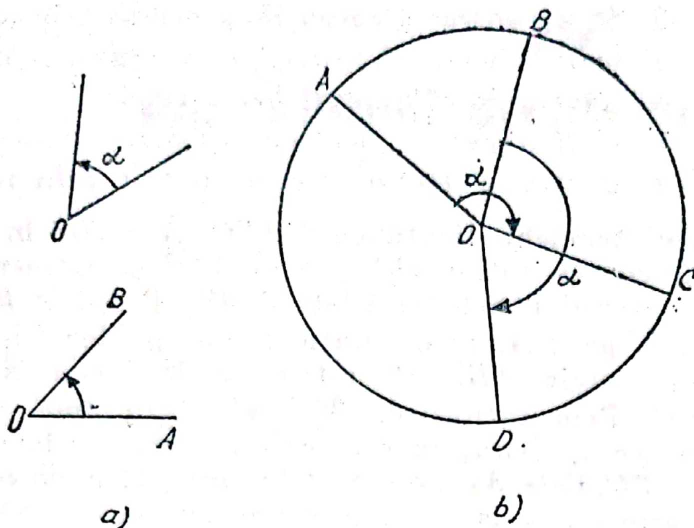


Fig. 40

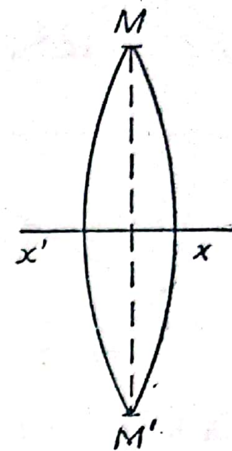


Fig. 41

Aplicație.

1) Prin rotirea de 360° a unui segment de dreaptă în jurul unei drepte din planul său, care nu taie axa, se formează un cilindru, cînd segmentul este paralel cu axa de rotație, un con cînd segmentul are o extremitate pe axă, un trunchi de con cînd segmentul nu e paralel cu axa și nu o taie (fig. 42 *a*, *b*, *c*).

Prin rotație, extremitățile segmentului descriu cîte un cerc cu centrul pe axă și raza perpendiculara din extremitatea segmentului pe axă. Segmentul generează suprafața laterală (fig. 42).

2) Prin rotirea de 360° a unui dreptunghi în jurul unei laturi a lui, a unui triunghi dreptunghic în jurul unei catete și a unui trapez dreptunghic în jurul laturii perpendiculare pe bază, se obțin corpurile de rotație: cilindrul circular drept, conul circular drept, trunchiul de con circular drept (fig. 42 *a*, *b*, *c*).

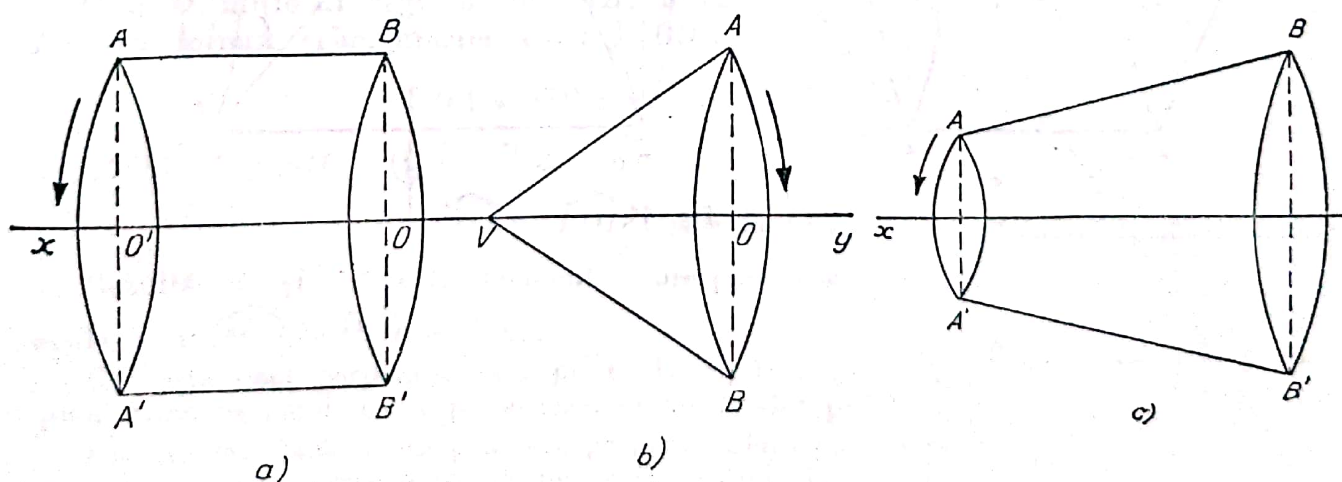


Fig. 42

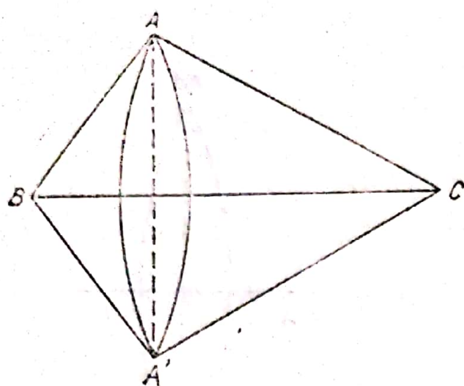


Fig. 43

3) Să se găsească corpurile generate prin rotirea
a) unui triunghi dreptunghic în jurul ipotenuzei;
b) unui trapez în jurul bazei mari;
c) unui trapez în jurul bazei mici.

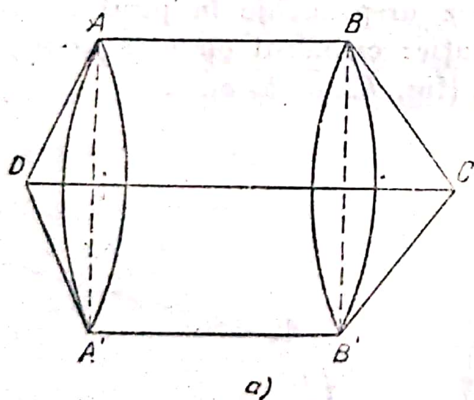
a) Pentru a stabili corpul născut prin rotirea unui triunghi dreptunghic ABC ($\widehat{A} = 90°$) în jurul ipotenuzei, rotim vîrful A de 180° și obținem A', simetricul punctului A față de BC. Punctele B și C fiind pe axă, prin rotație rămîn pe loc (fig. 43). Segmentele AB, AC rotite de 180° sînt $A'B$ și $A'C$. Prin rotirea de 360° se obțin două conuri cu aceeași bază, un cerc cu raza egală cu înălțimea relativă la ipotenuza triunghiului ABC. Cele două catete devin generatoarele conurilor iar înălțimea unuia din conuri este proiecția generatoarei respective pe axă.

b) Rotim vîrfurile bazei mici de 180° deci luăm A', B' simetricele punctelor A și B, și desenăm cercurile de diametru AA', BB'. Am obținut un corp format dintr-un cilindru terminat la capete cu două conuri. Razele cercurilor de bază sînt egale cu înălțimea trapezului (fig. 44, *a*).

c) Rotim de 180° vîrfurile bazei mari DC în jurul bazei mici (prelungită) luăm simetricele C', D' ale punctelor C, D față de AB. Obținem un cilindru scobit la capete, un cilindru din care se scot două conuri (fig. 44, *b*).

Prin rotirea unui semicerc de 360° sau a unui cerc de 180° în jurul unui diametru, ia naștere o sferă care are centrul în centrul semicercului (cercului) și ca rază, raza semicercului (cercului).

În cele ce urmează vom întîlni și alte metode folosite în rezolvarea problemelor: metoda figurilor asemenea, translația, construcții geometrice etc.



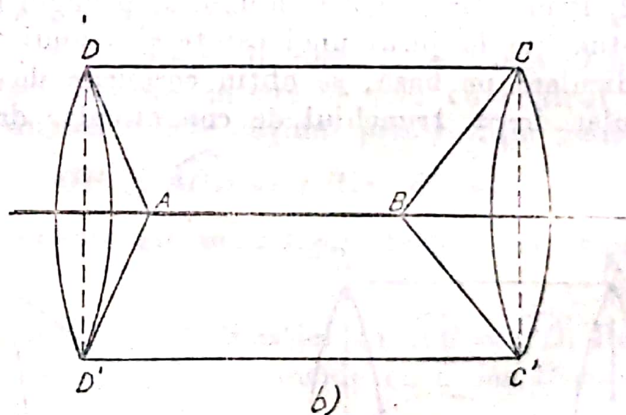


Fig. 44

IV
Paralelismul dreptelor și planelor

Am definit, în introducere, dreptele paralele. Existența lor este dată de teorema:

T e o r e m ă. *Într-un plan, două drepte perpendiculare pe aceeași dreaptă sînt paralele.*

Pentru demonstrare folosim metoda reducerii la absurd. Negăm propoziția dată. Există în plan două drepte perpendiculare pe o dreaptă care nu sînt paralele. Atunci, se întîlnesc într-un punct M. Rezultă că din M s-ar putea duce două perpendiculare pe d în planul determinat de dreaptă și punctul M ceea ce este imposibil. Deci cele două drepte nu se întîlnesc.

Pe baza acestei teoreme putem afirma că dintr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă la acea dreaptă. Cîte paralele se pot duce? La această întrebare răspunsul ni-l dă o axiomă (postulat).

P o s t u l a t u l   l u i   E u c l i d. *Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă.*

T e o r e m ă. *Dacă două drepte dintr-un plan, tăiate de o secantă, formează unghiuri alterne interne egale, atunci dreptele sînt paralele.*

Fie a, b două drepte și secanta c care taie cele două drepte respectiv în A și B formînd unghiurile alterne interne $\hat{1}$ și $\hat{2}$, egale (fig. 45). Putem dovedi că dreptele a și b sînt paralele dacă dovedim că ele sînt perpendiculare pe aceeași dreaptă.

Prin O, mijlocul segmentului AB, ducem $OC \perp a$, OC prelungită taie pe b în D; s-au format triunghiurile COA și DOB.

$$\Delta COA = \Delta OBD \quad \begin{cases} OA = OB \text{ din construcție} \\ \hat{1} = \hat{2} \text{ din ipoteză} \\ \widehat{COA} = \widehat{BOD} \text{ opuse la vîrf.} \end{cases}$$

Rezultă că și celelalte elemente corespunzătoare sînt egale deci: $\widehat{ACO} = \widehat{ODB} = 1$ dr.

CD este deci perpendiculară pe b. Dreptele a și b din plan, fiind perpendiculare pe aceeași dreaptă, sînt paralele.

Consecință. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe o altă dreaptă, ea este perpendiculară pe orice paralelă la această dreaptă.

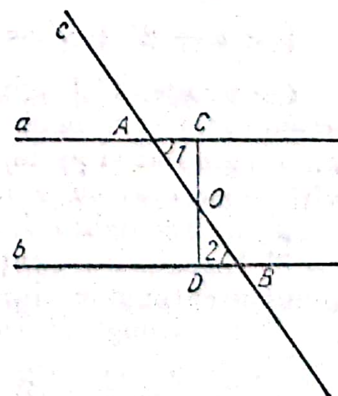


Fig. 45

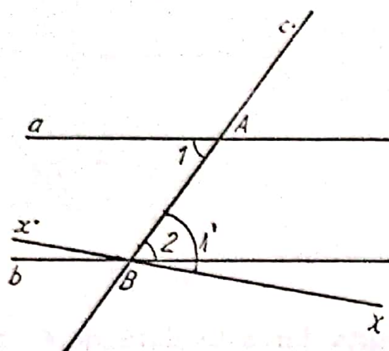


Fig. 46

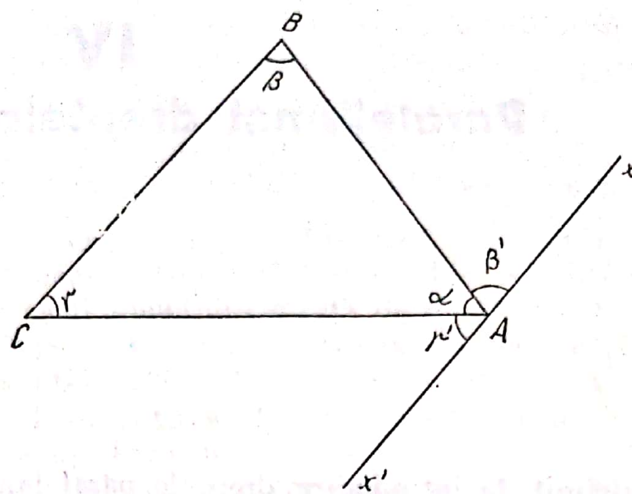


Fig. 47

T e o r e m ă   r e c i p r o c ă. *Dacă două drepte sînt paralele, atunci o secantă care le taie formează unghiuri alterne interne egale.*

Fie $a \parallel b$ şi secanta c care taie a şi b respectiv în A şi B (fig. 46). Vrem să dovedim că $\hat{1} = \hat{2}$. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există o secantă c astfel încît $\hat{1} \neq \hat{2}$, fie de exemplu $\hat{1} > \hat{2}$. Ducem prin B o semidreaptă Bx care să formeze cu b un unghi $\hat{1}' = \hat{1}$ neadiacent cu unghiul $\hat{2}$. Pe baza teoremei precedente rezultă $a \parallel Bx$. Dar din ipoteză $a \parallel b$. Rezultă că prin B se pot duce două paralele la dreapta a ceea ce contrazice postulatul lui Euclid. Deci $\hat{1} = \hat{2}$; semidreapta Bx are direcţia dreptei b.

T e o r e m ă. *Suma unghiurilor interioare ale unui triunghi este egală cu* 2 dr (180°).

Fie un triunghi oarecare ABC. Notăm cu α, β, γ cele trei unghiuri ale triunghiului şi căutăm să formăm un unghi egal cu $\alpha + \beta + \gamma$ şi care să aibă vîrful într-un vîrf al triunghiului. Ducem printr-un vîrf al triunghiului o paralelă la latura opusă (fig. 47). Ducem prin A o paralelă $x'x$ la BC.

S-au format unghiurile adiacente α, β', γ' (fig. 47) dar:

$\beta = \beta'$ (alterne interne formate de AB şi $x'x \parallel BC$).

$\gamma = \gamma'$ (alterne interne formate de AC şi $x'x \parallel BC$).

Dar $\alpha + \beta' + \gamma' = 2$ dr deci şi $\alpha + \beta + \gamma = 2$ dr.

Consecinţe. 1° Unghiul adiacent suplementar unghiului unui triunghi, numit unghi exterior triunghiului (avînd ca vîrf un vîrf al triunghiului şi ca laturi o latură a triunghiului şi prelungirea celeilalte laturi a triunghiului, care porneşte din acelaşi vîrf), este egal cu suma unghiurilor interioare neadiacente lui.

2° Un triunghi echilateral are fiecare unghi egal cu 60°.

3° Unghiurile ascuţite ale unui triunghi dreptunghic sînt complementare. Triunghiul dreptunghic isoscel are fiecare unghi ascuţit de 45°.

4° În triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$, avem

1) $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C})$;   2) $\hat{B} = \hat{C} = \dfrac{180° - \hat{A}}{2}$.

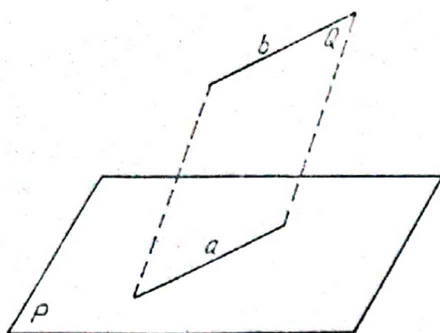


Fig. 48

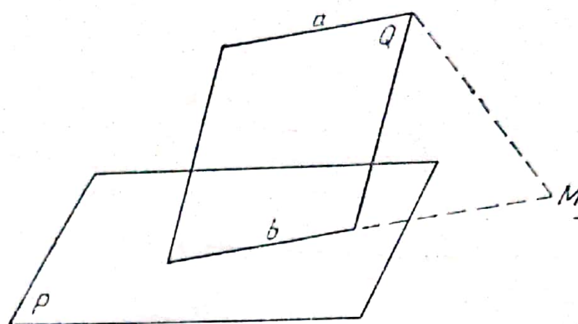


Fig. 49

5° Un triunghi are cel mult un unghi drept sau obtuz.

T e o r e m ă. *Suma unghiurilor interioare ale unui poligon convex cu n laturi este* $S_n = (n-2)$ 2dr *sau* $S_n = (n-2)\ 180°$.

În adevăr, dintr-un vîrf al poligonului ducem toate diagonalele (segmente care unesc două vîrfuri care nu sînt pe aceeaşi latură) se formează $(n-2)$ triunghiuri. Suma unghiurilor acestor triunghiuri este suma unghiurilor poligonului:

$$S_n = (n-2)\ 2\ \text{dr} \quad \text{sau} \quad S_n = (n-2)\ 180°.$$

Dreaptă paralelă cu un plan

T e o r e m ă. *Dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă din plan şi nu e conţinută în plan, atunci ea este paralelă cu planul.*

Fie P planul şi dreapta $a \subset P$ iar $b \parallel a$. Dreptele a şi b fiind paralele, determină un plan Q (fig. 48) şi $P \cap Q = a$; dreapta b nu poate intersecta planul P decît într-un punct al dreptei de intersecţie a planelor P şi Q (dreapta a). Dar $a \parallel b$ deci b nu intersectează planul; $b \parallel P$.

T e o r e m ă. *Dacă o dreaptă a este paralelă cu un plan P, orice plan Q care trece prin a şi intersectează planul P, îl intersectează după o dreaptă b paralelă cu a.*

Fie planul P şi dreapta $a \parallel P$. Un plan oarecare Q, care trece prin a $(a \in Q)$, intersectează planul P după o dreaptă b $(P \cap Q = b)$ (fig. 49). Fiind în acelaşi plan (Q), dreptele a şi b sînt concurente sau paralele. Dacă a şi b sînt concurente, ele se întîlnesc într-un punct M al dreptei de intersecţie a celor două plane, dreapta b. Deci dreapta a înţeapă planul în M ceea ce contrazice ipoteza $(a \parallel P)$. Aşadar $a \parallel b$.

T e o r e m ă . *În plan, două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele.*

Fie $a \parallel b$ şi $b \parallel c$, în acelaşi plan P (fig. 50). Trebuie să demonstrăm că $a \parallel c$.

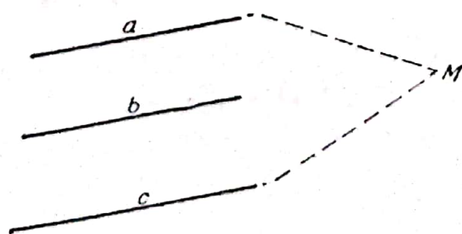


Fig. 50

Fiind în acelaşi plan, dreptele a şi c pot fi concurente sau paralele. Dacă sînt concurente, ele se întîlnesc într-un punct M. Rezultă că din M se pot duce două paralele la dreapta b ceea ce contrazice postulatul lui Euclid. Dreptele nu pot fi concurente. Ele aparţinînd aceluiaşi plan, trebuie să fie paralele $a \parallel c$.

Teorema se poate demonstra şi în cazul cînd dreptele a,b,c nu sînt situate în acelaşi plan (una

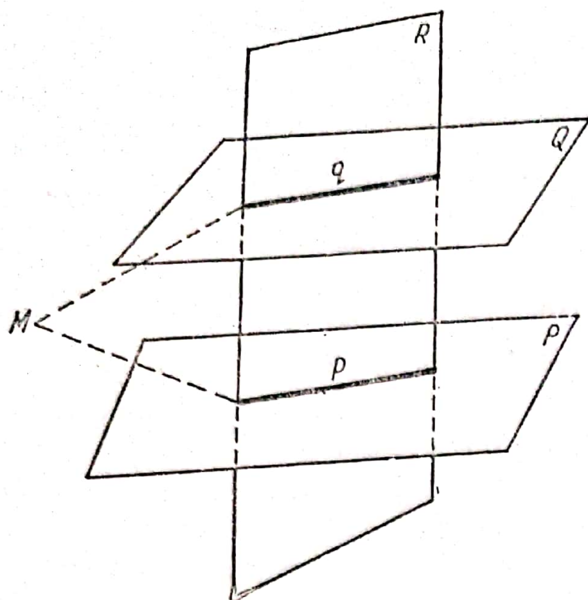


Fig. 51

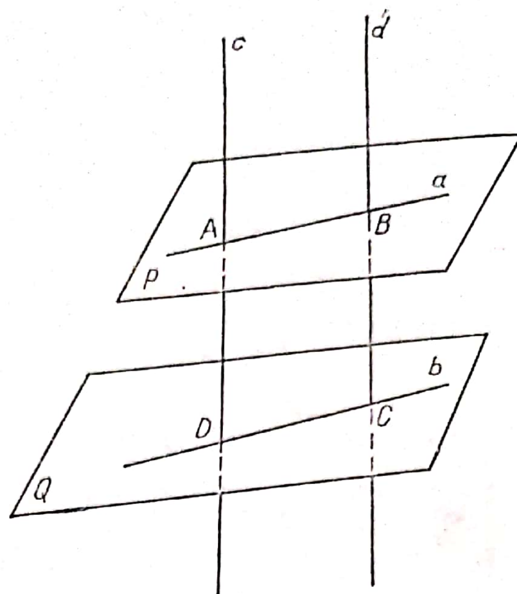


Fig. 52

din drepte nu aparține planului determinat de celelalte două) și în cazul cînd în loc de drepte luăm planele P, Q, R. Dacă $P \parallel Q$ și $P \parallel R$ atunci $Q \parallel R$.

Spunem că relația de paralelism este tranzitivă.

Plane paralele

Teoremă. *Dacă două plane paralele sînt intersectate de un al treilea plan, atunci dreptele de intersecție sînt paralele.*

Fie planele $P \parallel Q$, planul R, $P \cap R = p$ și $R \cap Q = q$ (fig. 51).

Dreptele p și q fiind în același plan sînt concurente, sau paralele. Dacă aceste două drepte p și q sînt concurente într-un punct M, atunci punctul M este un punct comun planelor P și Q ceea ce contrazice ipoteza ($P \parallel Q$). Deci p și q nu pot fi concurente. Ele, aparținînd unui plan (R), sînt paralele: $p \parallel q$.

Teoremă. *Dacă două drepte (sau două plane) sînt paralele, atunci ele determină, pe două secante paralele, segmente egale.*

a) Fie dreptele paralele $a \parallel b$ (sau $P \parallel Q$) tăiate de dreptele $c \parallel d$ (fig. 52). Notăm punctele de intersecție cu A,B,C,D.

Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram deci $AD = BC$ (laturi opuse în paralelogram).

Teoremă. *Dacă două unghiuri au laturile respectiv paralele, atunci ele sînt egale dacă amîndouă sînt ascuțite (obtuze) și suplementare dacă unul este ascuțit și celălalt obtuz.*

a) Cele două unghiuri sînt în același plan (fig. 53, *a*). Fie unghiurile xOy și $x'O'y'$ (ambele ascuțite) astfel ca $Ox \parallel O'x'$ și $Oy \parallel O'y'$. și $A = Ox \cap O'y'$.

1) $\widehat{xAy'} = \widehat{x'O'y'}$ (corespondente, $O'x' \parallel Ox$ tăiate de $O'y'$).

2) $\widehat{xAy'} = \widehat{xOy}$ (corespondente, $O'y' \parallel Oy$ tăiate de Ox).

Din 1) și 2) rezultă: $\widehat{x'O'y'} = \widehat{xOy}$ (relația de egalitate este tranzitivă).

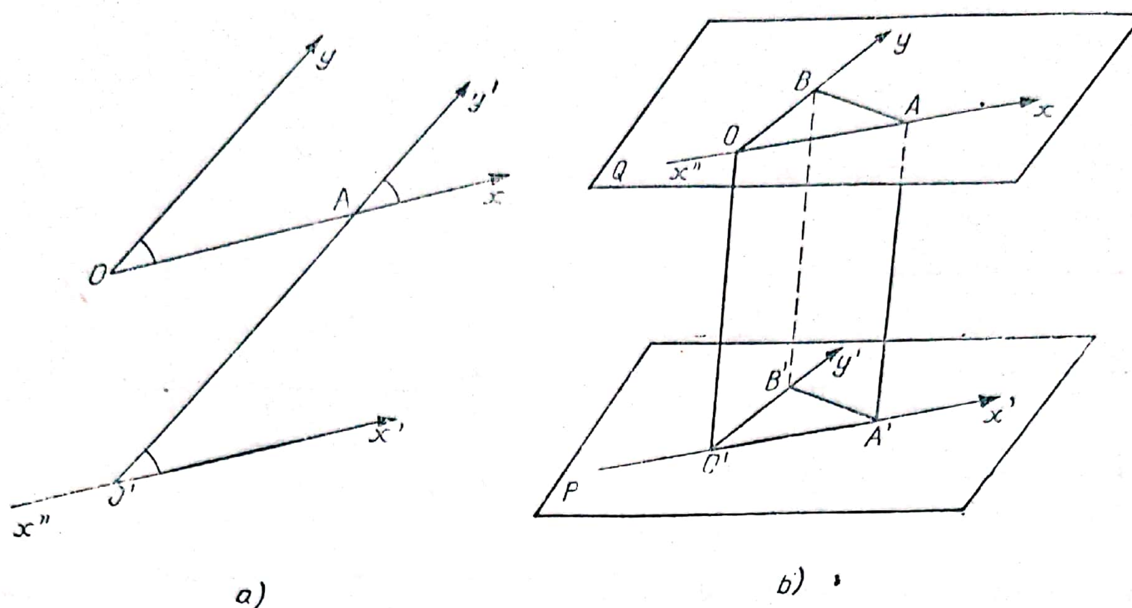


Fig. 53

Dacă ducem semidreapta $O'x''$ în sens contrar semidreptei $O'x'$ se obține unghiul obtuz $x''O'y'$ care are $O'x'' \parallel Ox$, $O'y' \parallel Oy$. Dar unghiul $x''O'y'$ este suplementul unghiului $x'O'y'$ deci

$$\widehat{xOy} + x''\widehat{O'y'} = 2 \text{ dr.}$$

2) Cele două unghiuri ascuțite sînt în plane diferite (fig. 53,b), și $Ox \parallel O'x'$, $Oy \parallel O'y'$. Vom demonstra egalitatea unghiurilor xOy și $x'O'y'$ încadrîndu-le în triunghiuri egale. Luăm pe semidreptele Ox și $O'x'$ segmentele egale $OA = O'A'$; pe semidreptele Oy și $O'y'$ segmentele egale $OB = O'B'$. Patrulaterele $OAA'O'$ și $OB'BO'$ avînd fiecare două laturi opuse paralele și egale, sînt paralelograme deci 1) $AA \underline{\parallel} OO'$; 2) $BB' \underline{\parallel} OO'$. Paralelismul și egalitatea fiind tranzitive, $BB' \underline{\parallel} AA'$ deci patrulaterul $ABB'A'$ este paralelogram. Rezultă $AB = A'B'$. Triunghiurile OAB și $O'A'B'$ sînt egale avînd laturile respective egale. Rezultă $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$ (se opun în triunghiuri egale la laturi egale: $AB = A'B'$).

Ca și în cazul precedent $x''\widehat{O'y} + \widehat{xOy} = 2$ dr.

T e o r e m ă . *Dacă mai multe drepte (plane) paralele determină pe o secantă segmente egale, ele vor determina pe orice altă secantă segmente egale între ele.*

a) Fie $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ și secanta a care taie cele trei drepte în punctele A, B, C, (fig. 54, a) astfel ca $AB = BC$. Ducem o secantă b și notăm punctele de intersecție cu cele trei drepte respectiv cu A', B', C'. Vrem să demonstrăm că dacă $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ și $AB = BC$, atunci $A'B' = B'C'$.

În adevăr, dacă ducem prin A' și B' paralele la dreapta a și notăm cu A'' și B'' intersecțiile cu dreptele d_2, d_3 avem $\Delta A'B'A'' = \Delta B'C'B''$. Rezultă: $A'B' = B'C'$ (se opun în triunghiuri egale la unghiuri egale). Dacă dreptele a și b sînt paralele, teorema este adevărată pe baza teoremei precedente.

b) Dacă planele $P \parallel Q \parallel R$ determină pe o secantă a segmente egale, $AB = BC$ (fig. 54, b), atunci ele determină pe orice secantă b, segmente egale: $A'B' = B'C'$. Ducem prin A' o secantă b' paralelă cu a ($b' \parallel a$), care taie planele Q și R în B'', C''.

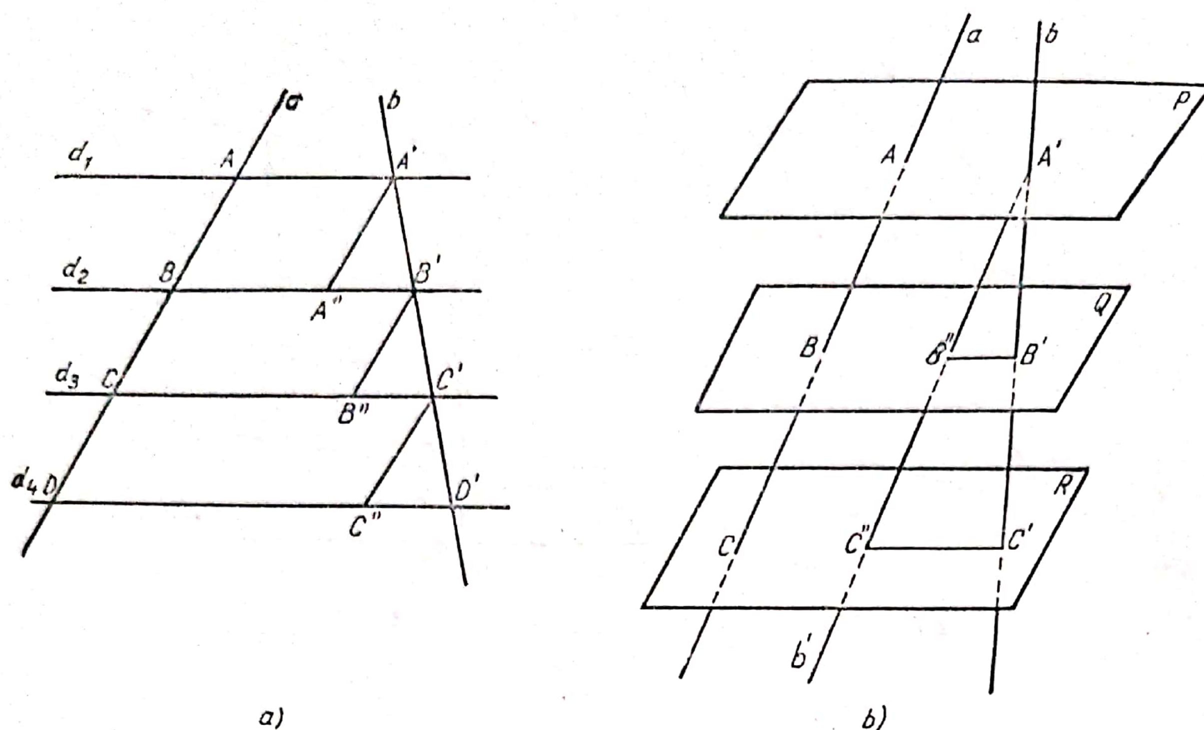


Fig. 54

Vom avea: $A'B'' = AB$ și $B''C'' = BC$ (segmente paralele cuprinse între plane paralele). Dar $AB = BC$ deci $A'B'' = B''C''$. Planul determinat de b' și b taie planele paralele Q și R după dreptele paralele $B'B''$ și $C'C''$. Aplicînd cele stabilite la punctul a (dreptele paralele $B'B'' \parallel C'C''$ determină pe b segmente egale):

$$A'B' = B'C'.$$

T e o r e m ă. *Mai multe drepte paralele determină pe două secante segmente proporționale.*

Fie dreptele $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$ și secantele a și b care le intersectează în A, B, C, D respectiv A', B', C', D' (fig. 55). Notăm raportul segmentelor AB și BC cu $\frac{m}{n}$ (presupun că există o unitate de măsură care se cuprinde în AB de m ori și în BC de n ori). Împărțind segmentul AB în m părți egale și BC în n părți egale, ducem prin punctele de diviziune paralele cu d_1, ele vor fi paralele între ele și paralele cu d_2 și d_3 (paralelismul este o relație tranzitivă). Aceste $m + n$ paralele vor determina, pe secanta $b' \parallel b$ prin A, $m + n$ puncte care vor împărți pe AB'' în m părți egale și pe $B''C''$ în n părți egale

$$\frac{AB''}{B''C''} = \frac{m}{n}. \text{ Dar } AB'' = A'B' \text{ și } B''C'' = B'C'$$

$$\text{deci } \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ sau } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

În mod analog se face raționamentul dacă avem mai mult de trei drepte paralele.

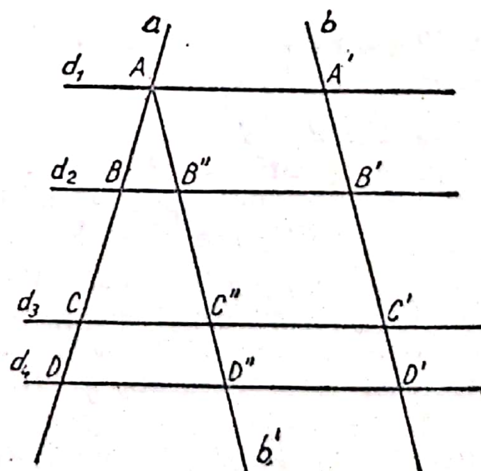


Fig. 55

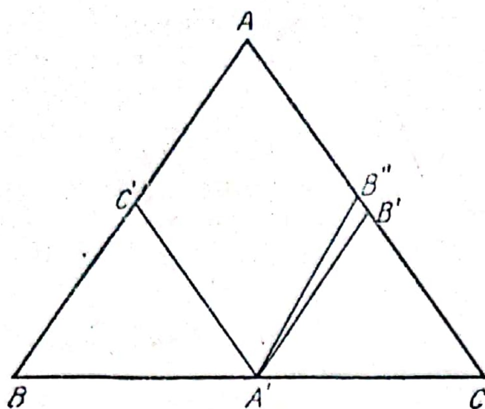


Fig. 56

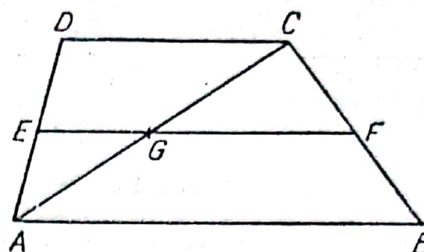


Fig. 57

Aplicații

1) *Segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi (linia mijlocie a triunghiului), este paralel cu a treia latură și egal cu jumătate din ea.*

În triunghiul ABC dacă $A'B = A'C$, $B'A = B'C$, atunci

$$A'B' \parallel AB \text{ și } A'B' = \frac{AB}{2}.$$

În adevăr, $A'B'$ fiind în planul triunghiului poate fi concurentă sau paralelă cu AB. Dacă $A'B'$ nu este paralelă cu AB ducem prin A' dreapta $A'B'' \parallel AB$, atunci $A'B''$ determină pe AC două segmente egale deci B'' se confundă cu B' și $A'B' \parallel AB$ (fig. 56).

Ducînd prin A' dreapta $A'C' \parallel AC$, punctul C' împarte pe AB în două părți egale deci: 1) $C'A = C'B$. Dar 2) $C'B = A'B'$ (laturi opuse în paralelogram). Din (1) și (2) rezultă

$$C'B = \frac{AB}{2} = A'B', \quad \text{deci} \quad A'B' = \frac{AB}{2}.$$

2) *Segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele în trapez (linia mijlocie) este paralelă cu bazele și egală cu semisuma bazelor.*

Fie trapezul $ABCD$ și EF linia mijlocie. Diagonala AC taie pe EF în G (fig 57). Să arătăm că: a) $EF \parallel DC$. În adevăr, ducînd prin F o paralelă la DC, ea va împărți segmentul AC în două părți egale deci va trece prin G și E.

b) În triunghiul ADC, $EG \parallel DC$ și $AE = ED$ deci EG este linie mijlocie,

$$EG = \frac{DC}{2}. \text{ Analog în } \Delta ABC,\ GF = \frac{AB}{2}, \text{ deci } EF = \frac{DC + AB}{2}.$$

Paralelogramul

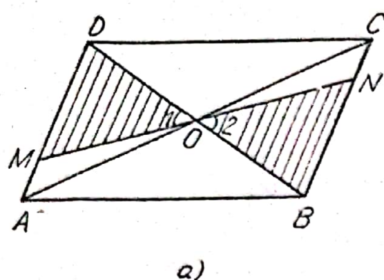
Teoremă. *Dacă un patrulater $ABCD$ este paralelogram, atunci avem relațiile:*

a) $\hat{A} = \hat{C}$ *și* $\hat{B} = \hat{D}$;

b) $AB = CD$ și $AD = BC$;

c) $OB = OD$ și $OA = OC$ (*O fiind intersecția diagonalelor*);

d) *O este centrul de simetrie.*



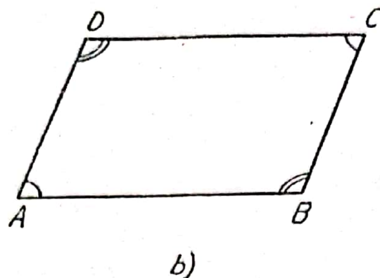


Fig. 58

În adevăr, fie patrulaterul $ABCD$ în care $AB \parallel DC$ și $AD \parallel BC$ (fig. 58, *a*).

a) $\hat{A}+\hat{B}=2$ dr și $\hat{B}+\hat{C}=2$ dr (unghiuri interne de aceeași parte a secantei formate de drepte paralele tăiate de o secantă).

Rezultă: $\hat{A}=\hat{C}$. Analog $\hat{B}=\hat{D}$.

b) Ducînd diagonala AC s-au format două triunghiuri ACD și ABC egale ($\widehat{CAB}=\widehat{ACD}$ și $\widehat{ACB}=\widehat{DAC}$ ca unghiuri alterne interne formate de drepte paralele tăiate de secanta AC și AC comună). Rezultă:

$AB=CD$, $AD=BC$ (se opun în triunghiuri egale la unghiuri egale).

c) Ducînd și diagonala BD, care intersectează diagonala AC în O, s-au format triunghiurile egale DOC și AOB.

$$\Delta DOC=\Delta AOB\ (DC=AB,\quad \widehat{DCO}=\widehat{OAB} \text{ și } \widehat{ODC}=\widehat{OBA};$$

unghiuri alterne interne formate de $DC \parallel AB$, tăiate de secantele AC și DB). Rezultă: $OC=OA$ și $OD=OB$.

d) Fie M un punct pe una din laturile paralelogramului (de exemplu pe AD). Simetricul lui față de O se găsește pe BC. În adevăr, $\Delta MOD=\Delta NOB$ ($OD=OB$ — — din proprietățile paralelogramului; $\hat{O}_1=\hat{O}_2$, opuse la vîrf, $\widehat{ODM}=\widehat{OBN}$ alterne interne; $AD \parallel BC$ tăiate de DB). Rezultă:

$OM=ON$. Deci N este simetricul lui M față de O.

Teorema reciprocă. *Dacă într-un patrulater $ABCD$ avem relațiile:*

a) $\hat{A}=\hat{C}$ și $\hat{B}=\hat{D}$;

b) $AB=CD$ și $AD=BC$;

c) $AB \parallel CD$ și $AB=CD$;

d) $OB=OD$ și $OA=OC$ (O *intersecția diagonalelor*);

e) *punctul de intersecție a diagonalelor este centru de simetrie, atunci patrulaterul este paralelogram.*

În patrulaterul $ABCD$:

$\hat{A}=\hat{C}$ și $\hat{B}=\hat{D}$ (fig. 58, *b*). Rezultă

$\hat{A}+\hat{B}=\hat{C}+\hat{D}$ și $\hat{A}+\hat{D}=\hat{C}+\hat{B}$.

Dar suma unghiurilor în patrulater este 360°. Vom avea:

1) $\hat{A}+\hat{B}=180°$ deci $AD \parallel BC$,

2) $\hat{A}+\hat{D}=180°$ deci $AB \parallel DC$.

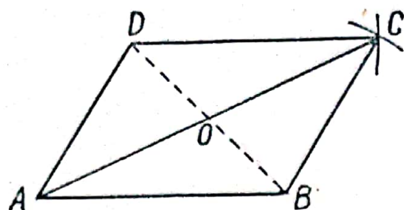


Fig. 59

Patrulaterul este paralelogram.

b) În patrulaterul $ABCD$ în care $AB = CD$ și $AD = BC$ (fig. 59), $\Delta ABC = \Delta ADC$ (avînd laturile respectiv egale). Rezultă:

1) $\widehat{DAC} = \widehat{ACB}$. Unghiurile alterne interne fiind egale, $AD \parallel BC$.

2) $\widehat{DCA} = \widehat{CAB}$. Unghiurile alterne interne fiind egale, $DC \parallel AB$.

c) În patrulaterul $ABCD$ avem $AB \parallel CD$ și $AB = CD$ (fig. 59). $\Delta ABC = \Delta ADC$ $(AB = DC,\ AC = AC,\ \widehat{BAC} = \widehat{ACD})$ Rezultă $\widehat{ACB} = \widehat{DAC}$ așadar $AD \parallel BC$.

Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

d) În patrulaterul $ABCD$ notînd cu O intersecția diagonalelor AC și DB (fig. 59), avem: $OB = OD$ și $OA = OC$

$\Delta AOB = \Delta DOC$ $(OB = OD,\ OA = OC,\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2$, opuse la vîrf).

Rezultă:

1) $\widehat{BAO} = \widehat{OCD}$ deci $AB \parallel CD$.

Analog, din $\Delta AOD = \Delta BOC$ rezultă:

2) $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$ deci $AD \parallel BC$.

Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

e) Dacă patrulaterul are ca centru de simetrie punctul O de intersecție a diagonalelor, atunci $OB = OD$, $OC = OA$. Pe baza propoziției precedente patrulaterul este paralelogram.

Paralelograme particulare

Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept. Dreptunghiul fiind paralelogram, are toate proprietățile paralelogramului. Pe baza acestor proprietăți și a definiției se demonstrează că:

a) dreptunghiul are toate unghiurile egale,

b) dreptunghiul are diagonalele egale.

În adevăr, fie dreptunghiul $ABCD$ (fig. 60) în care $\hat{A} = 1$ dr. Pe baza proprietăților paralelogramului avem $\hat{A} = \hat{C}$ și $\hat{A} + \hat{B} = 2$ dr. Rezultă: $\hat{B} = 1$ dr și $\hat{D} = 1$ dr.

b) Pe figura 61 ducîndu-se diagonalele AC și BD, avem:

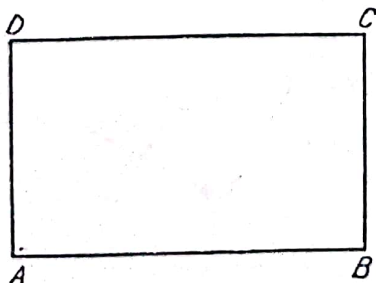


Fig. 60

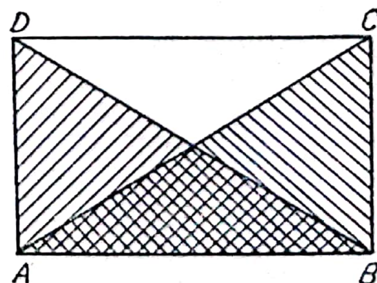


Fig. 61

$\Delta ABC = \Delta ABD$ (triunghiuri dreptunghice cu catetele respective egale). Rezultă: $AC = BD$.

Rombul este paralelogramul cu două laturi alăturate egale.

Pe baza definiției și a proprietăților paralelogramelor se demonstrează că:

a) rombul are laturile egale,

b) diagonalele rombului sînt perpendiculare și sînt bisectoarele unghiurilor rombului.

a) În figura 62 avem rombul $ABCD$ în care $AB = BC$, rezultă din proprietățile paralelogramului $AB=DC$ și $BC=AD$

b) ΔABC este isoscel ($AB = BC$) deci mediana BO este și înălțime ($BO \perp AC$) și bisectoare ($\widehat{ABO} = \widehat{OBC}$).

În mod analog pentru diagonala AC.

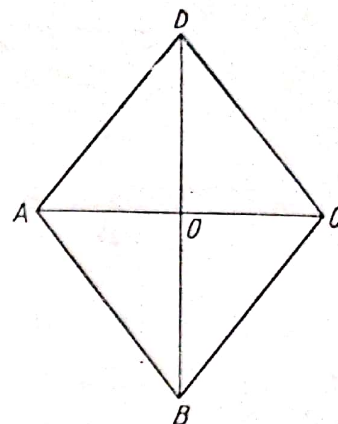


Fig. 62

Pătratul este dreptunghiul cu două laturi alăturate egale sau rombul cu un unghi drept. Fiind și dreptunghi și romb, are atît proprietățile dreptunghiului cît și ale rombului.

Aplicații

1) *Să se demonstreze că unind consecutiv mijloacele laturilor într-un patrulater convex obținem un paralelogram. În ce caz acest paralelogram este: a) dreptunghi? b) romb? c) pătrat?*

Fie patrulaterul $ABCD$ (fig. 63) și punctele L,M,N,P mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA.

În patrulaterul $LMNP$ avem:

$PL \parallel MN$ și $PL = MN$ (linii mijlocii în triunghiurile DAB și DBC). Deci patrulaterul $LMNP$ este paralelogram.

a) Paralelogramul este dreptunghi cînd are un unghi drept. Dar $AC \parallel PN$ și $PL \parallel DB$. Pentru ca unghiul $\widehat{LPN}$ să fie drept trebuie ca diagonalele AC și BD ale patrulaterului să fie perpendiculare.

b) Pentru ca paralelogramul să fie romb trebuie ca $PL = PN$ deci trebuie ca diagonalele AC și BD ale patrulaterului să fie egale.

c) Pentru ca paralelogramul să fie pătrat trebuie să fie și romb și dreptunghi deci AC și BD, diagonalele patrulaterului trebuie să fie egale și perpendiculare.

2) *Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor unui paralelogram intersectîndu-se, formează un dreptunghi.*

Fie paralelogramul $ABCD$ (fig. 64). Bisectoarea unghiului A și bisectoarea unghiului C intersectează bisectoarele din B și D respectiv în L,P și M,N. Dar bisectoarele

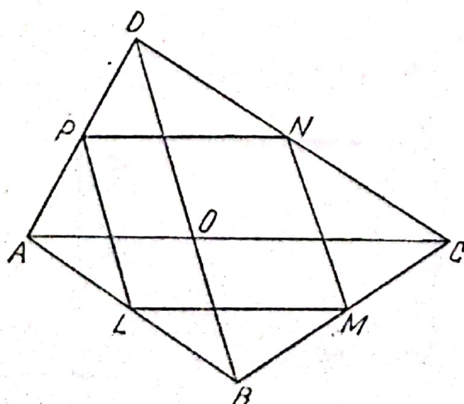


Fig. 63

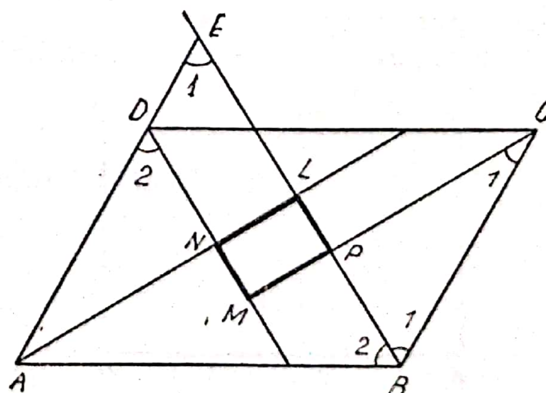


Fig. 64

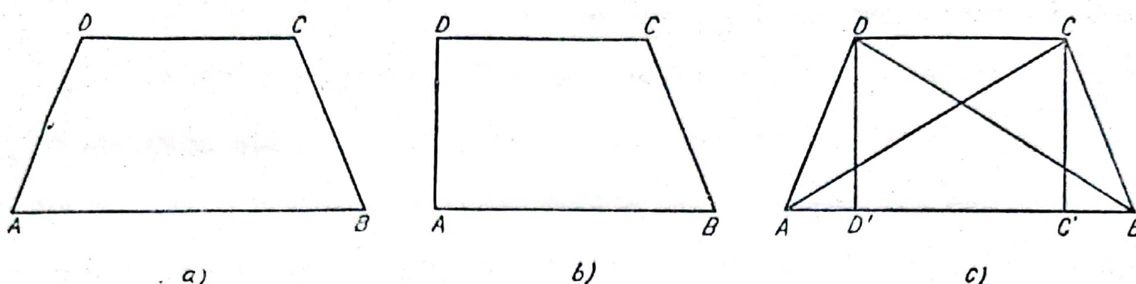


Fig. 65

duse din vîrfurile opuse ale paralelogramului sînt paralele. În adevăr, dacă notăm cu E intersecția bisectoarei din B cu latura opusă AD avem:

$\hat{B}_1 = \hat{E}_1$ (alterne interne; $AD \parallel BC$ și secanta BE)

dar $\hat{B}_1 = \hat{D}_2$ (jumătăți de unghiuri egale). Deci $BE \parallel DN$ (formează cu AD unghiuri corespondente egale $\hat{D}_2 = \hat{E}_1$). Analog, $AN \parallel CM$.

Patrulaterul $LMNP$ este paralelogram.

În triunghiul PCB avem: $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90°$ $(\hat{B} + \hat{C} = 180°)$ rezultă

$$\widehat{BPC} = 90° \quad \text{deci} \quad \widehat{LPM} = 90°.$$

Paralelogramul $LMNP$ avînd un unghi drept este dreptunghi.

Trapezul

Trapezul este patrulaterul care are numai două laturi paralele.

Laturile paralele se numesc bazele trapezului (fig. 65, *a*). Se numește trapez dreptunghic trapezul care are un unghi drept (fig. 65, *b*).

Se numește trapez isoscel, trapezul în care laturile neparalele sînt egale (fig. 65, *c*).

În trapezul isoscel unghiurile alăturate unei baze sînt egale și diagonalele sînt egale.

În adevăr, ducînd $DD' \perp AB$ și $CC' \perp AB$ (fig. 65, *c*), triunghiurile dreptunghice ADD' și $CC'B$ sînt egale ($AD = CB$ și $DD' = CC'$ ca paralele cuprinse între paralele). Rezultă: $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$.

$\Delta ADB = \Delta ACB$ ($AD = BC$; $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$, AB comună).

Rezultă: $AC = BD$.

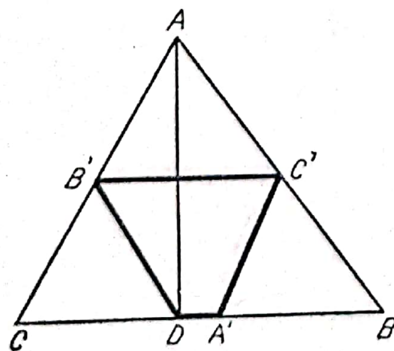


Fig. 66

Aplicație

Într-un triunghi oarecare mijloacele laturilor și piciorul unei înălțimi sînt vîrfurile unui trapez isoscel.

În adevăr notînd cu A', B', C' mijloacele laturilor și ducînd înălțimea AD (fig. 66), patrulaterul $A'B'C'D$ este trapez căci $B'C'$ este linie mijlocie în triunghiul ABC. Dar $A'C' = B'D$ ($A'C' = \frac{AC}{2}$ ca linie mijlocie și $B'D = \frac{AC}{2}$ ca mediană în triunghiul dreptunghic CAD) deci trapezul este isoscel.

Perpendicularitatea dreptelor şi a planelor

Am definit dreapta perpendiculară pe plan ca fiind dreapta perpendiculară pe toate dreptele din plan.

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o dreaptă să fie perpendiculară pe plan este dată de teorema următoare:

Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente din plan, ea este perpendiculară pe plan.

Dacă se dă un plan P, dreptele a, $b \in P$ şi o dreaptă d perpendiculară pe dreptele a şi b ($d \perp a$, $d \perp b$), atunci $d \perp P$ adică d este perpendiculară pe orice altă dreaptă c conţinută în planul P. Notăm cu O punctul de intersecţie a dreptei d cu planul P. Ducem prin O dreptele $a' \parallel a$, $b' \parallel b$, $c' \parallel c$ şi luăm pe dreptele a' şi b' respectiv punctele A, B şi C, D simetrice faţă de O (fig. 67). Patrulaterul $ABCD$ avînd un centru de simetrie, este paralelogram. Dreapta c' taie două laturi opuse în punctele M şi N simetrice faţă de O.

Luăm un punct $I \in d$ şi ducem oblicele $IC = ID$ şi $IB = IA$ (au picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei) $\Delta IDB = \Delta AIC$ (laturile respectiv egale) rezultă

$$\widehat{ICM} = \widehat{IDN}.$$

$\Delta IMC = \Delta IDN$ pentru că $IC = ID$ şi $\widehat{ICM} = \widehat{IDN}$ şi $MC = DN$ (segmente simetrice faţă de O) rezultă

$$IM = IN$$

Triunghiul IMN fiind isoscel iar IO fiind mediana dusă din vîrful laturilor egale este şi înălţime deci

$$d \perp c'.$$

Cum c' este o dreaptă oarecare a planului rezultă că d este perpendiculară pe orice dreaptă din plan; $d \perp P$.

Teorema celor trei perpendiculare. *Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe un plan P şi din piciorul acestei perpendiculare ducem o perpendiculară pe o dreaptă a conţinută în planul P, atunci dreapta care uneşte piciorul perpendicularei a doua cu un punct al dreptei d este perpendiculară pe dreapta a conţinută în plan.*

Fie planul P şi dreapta $a \in P$.

Dacă $d \perp P$ ($A = d \cap P$), $AB \perp a$, $B \in a$ şi $M \in d$, atunci $MB \perp a$.

În adevăr, din ipoteza: 1) $MA \perp a$ ($MA \perp P$). 2) $AB \perp a$.

Dreapta a fiind perpendiculară pe două drepte concurente din planul AMB, este perpendiculară pe acest plan deci $a \perp MB$ (fig. 68).

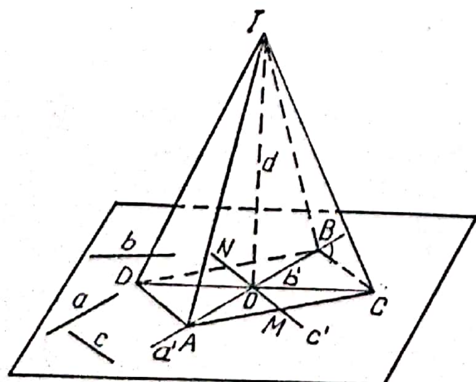


Fig. 67

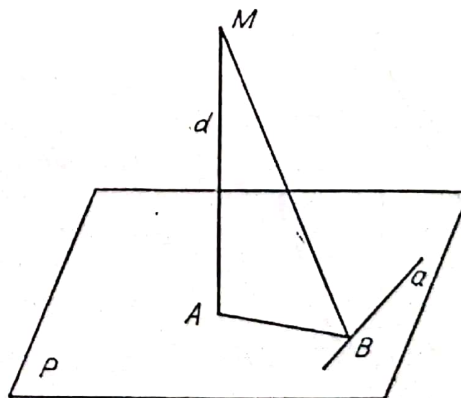


Fig. 68

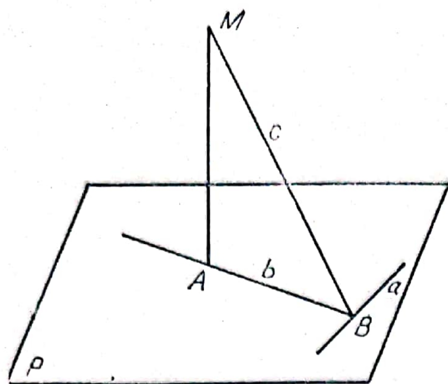


Fig. 69

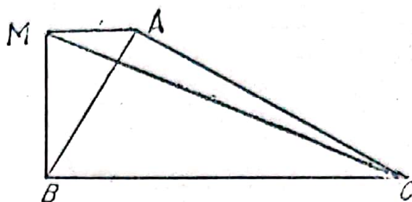


Fig. 70

Reciproca teoremei celor trei perpendiculare. *Dacă dintr-un punct exterior unui plan P ducem perpendiculara pe plan și perpendiculara pe o dreaptă conținută în plan, atunci dreapta care unește picioarele acestor două perpendiculare este perpendiculară pe dreapta din plan.*

Fie planul P și dreapta $a \in P$. Dacă $MA \perp P$ și $MB \perp a$, atunci $AB \perp a$.

În adevăr, dreapta a fiind perpendiculară pe două drepte din planul AMB ($MA \perp a$ și $MB \perp a$), este perpendiculară pe planul AMB, deci $a \perp AB$ (AB fiind conținută în planul AMB (fig. 68)).

Aplicații

1) *Fiind dat un plan P și o dreaptă a aparținînd planului P, dacă dintr-un punct B al dreptei a ducem două perpendiculare pe dreapta a, una în plan (b) și alta exterioară planului (c) și dintr-un punct M al dreptei c ducem o perpendiculară MA pe perpendiculara b conținută în plan, atunci dreapta MA este perpendiculară pe plan (reciproca a II-a a teoremei celor trei perpendiculare).*

Fie planul P, dreapta $a \in P$ și $B \in a$.

Dacă din B ducem $b \perp a$; ($b \in P$); $c \perp a$; ($c \notin P$);
și $MA \perp b$ ($M \in c$) atunci $MA \perp P$.

MA este perpendiculară pe plan dacă este perpendiculară pe două drepte din plan. Din ipoteză: $MA \perp b$ ($b \in P$). Dar avem și $MA \perp a$ pentru că a este perpendiculară pe planul AMB ($a \perp BA$, $a \perp MB$) deci $MA \perp P$ (fig. 69).

2) *În vîrful B al unui triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 1$ dr) se duce perpendiculara BM pe planul triunghiului. Să se dovedească că triunghiul MAC este dreptunghic.*

Fie triunghiul ABC în planul P și $BM \perp P$. Vom avea relațiile: $MB \perp P$, $BA \perp AC$. Rezultă conform teoremei celor trei perpendiculare că $MA \perp AC$ deci ΔMAC este dreptunghic în A (fig. 70).

3) *În vîrful A al unui dreptunghi ABCD se duce perpendiculara AM pe planul dreptunghiului. Să se demonstreze că unind punctul M cu vîrfurile dreptunghiului se obțin patru triunghiuri dreptunghice.*

În adevăr, MA fiind perpendiculară pe planul $ABCD$, vom avea: $MA \perp AB$ și $MA \perp AD$ deci triunghiurile MAB și MAD sînt dreptunghice. Dar $MB \perp BC$ ($MA \perp$

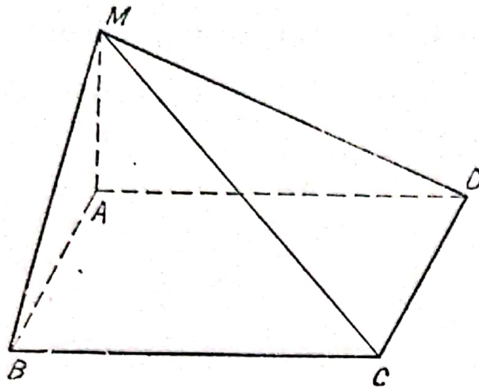


Fig. 71

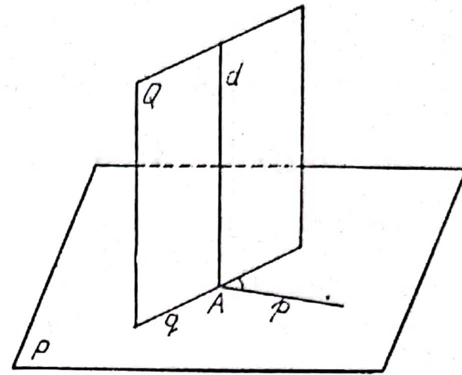


Fig. 72

$\perp ABCD$ și $AB \perp BC$) și $MD \perp DC$ ($MA \perp ABCD$ și $AD \perp DC$) deci și triunghiurile MDC și MBC sînt dreptunghice (fig. 71).

4) *Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe un plan P, atunci orice plan care trece prin d este perpendicular pe planul P.*

Fie planul P și $d \perp P$ notăm $A = d \cap P$. Prin d ducem un plan Q și notăm $q = P \cap Q$.

Cele două plane sînt perpendiculare dacă unghiul lor plan este unghi drept. Prin A ducem în P dreapta $p \perp q$. Unghiul format de dreptele d și p, concurente în A, este unghiul plan corespunzător diedrului. Dar $d \perp p$ ($d \perp P$ și $p \in P$) (fig. 72) deci $P \perp Q$.

V
Triunghiul

Am văzut în capitolele precedente că într-un triunghi sau în două triunghiuri egale la laturi egale se opun unghiuri egale și reciproc la unghiuri egale se opun laturi egale. Dacă două laturi (unghiuri) ale unui triunghi sînt neegale, unghiurile (laturile) care li se opun sînt neegale. Relațiile între laturile și unghiurile unui triunghi sau a două triunghiuri egale sînt date de următoarea teoremă:

T e o r e m a I. *Într-un triunghi sau în două triunghiuri egale dacă două laturi sînt neegale atunci la latura mai mare se opune unghiul mai mare și reciproc dacă două unghiuri sînt neegale la unghiul mai mare se opune latura mai mare.*

În adevăr, fie triunghiul ABC în care $AB > AC$ (fig. 73). Pe AB luăm, pornind din A, segmentul $AB' = AC$ ($AC < AB$ deci B' va fi între A și B). Unind B' cu C dreapta $B'C$ împarte unghiul ABC în două unghiuri adiacente deci $\widehat{ACB'} < \widehat{ACB}$ dar $\widehat{ACB'} = \widehat{AB'C}$ (se opun în același triunghi la laturi egale) și $\widehat{AB'C} > \widehat{ABC}$ ($\widehat{AB'C}$ unghi exterior deci egal cu suma unghiurilor interioare neadiacente. $\widehat{AB'C} = \widehat{ABC} + \widehat{B'CB}$) deci $\widehat{ACB} > \hat{B}$ căci o parte a lui ($\widehat{ACB'}$) este mai mare decît $\hat{B}$.

Reciproc, dacă $\widehat{ACB} > \widehat{CBA}$ atunci $AB > AC$. În adevăr, dacă $AB = AC$, atunci $\widehat{ACB} = \widehat{CBA}$; dacă $AB < AC$, atunci $\widehat{ACB} < \widehat{CBA}$ ceea ce contrazice ipoteza. Rămîne $AB > AC$.

Consecințe. 1) *Într-un triunghi dreptunghic, ipotenuza este mai mare decît o catetă.*

2) *Latura care se opune unui unghi obtuz este mai mare decît fiecare din celelalte două laturi ale triunghiului* (fig. 74).

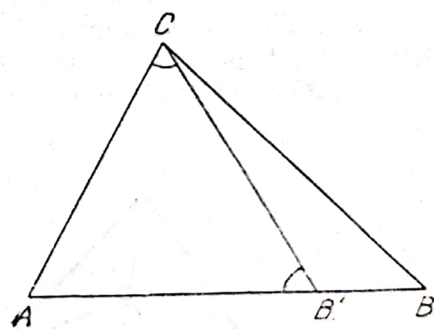


Fig. 73

Neegalități între laturile unui triunghi

T e o r e m ă. *Orice latură într-un triunghi este mai mică decît suma celorlalte două și mai mare decît modulul diferenței lor.*

În adevăr, fie un triunghi ABC. Orice latură este segmentul care unește două puncte deci este mai mică

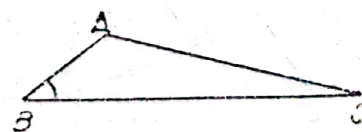


Fig. 74

decît orice alt drum dintre cele două puncte, în particular decît suma celorlalte două laturi:

$$AB < BC + AC; \; BC < CA + BA; \; CA < AB + CB.$$

Din prima și a treia relație obținem

$$BC > AB - AC \quad \text{și} \quad BC > CA - AB;$$

rezultă $BC > |AB - AC|$.
Analog, $CA > |BC - BA|$ și $AB > |CA - CB|$.

Linii importante în triunghi

1) *Mediana* este segmentul care unește un vîrf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse. Un triunghi are deci trei mediane.

Teoremă. *Medianele unui triunghi sînt concurente într-un punct G care se găsește pe fiecare mediană la $\frac{1}{3}$ de bază.*

În adevăr, fie triunghiul ABC (fig. 75) în care considerăm două mediane AA' și BB'; ele se întîlnesc într-un punct G.
Notăm cu D și E mijloacele segmentelor AG și BG. Avem relațiile:

1) $A'B' \parallel AB$ și $A'B' = \frac{AB}{2}$ ($A'B'$ linie mijlocie în triunghiul ABC).

2) $DE \parallel AB$ și $DE = \frac{AB}{2}$ (DE linie mijlocie în triunghiul ABG).

Pe baza tranzitivității paralelismului și a egalității avem și:
$A'B' \parallel DE$ și $A'B' = DE$. Rezultă că patrulaterul
$A'B'DE$ este paralelogram și avem relațiile $DG = GA'$ și $GE = GB'$ (proprietatea diagonalelor). Deci: $\frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{2}$ căci din construcție $DG = AD$ și $GE = EB$. A treia mediană trece și ea prin G.

2) *O mediatoare* a unui triunghi este mediatoarea segmentului determinat de două vîrfuri ale triunghiului.
Într-un triunghi mediatoarele sînt concurente într-un punct O.
Fie ABC un triunghi (fig. 76) în care ducem mediatoarele laturilor AB și AC. Ele se întîlnesc într-un punct O dar, din proprietatea punctelor mediatoarei unui segment, $AO = OB$ (O pe mediatoarea segmentului AB) și $OA = OC$ (O pe mediatoarea

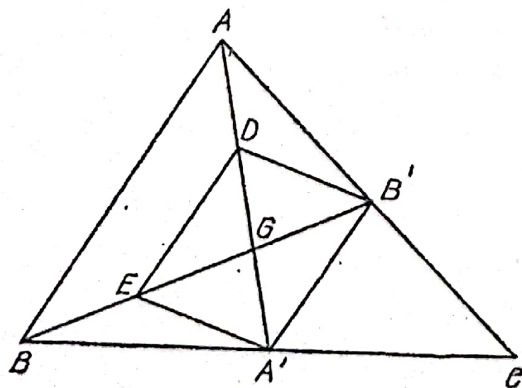


Fig. 75

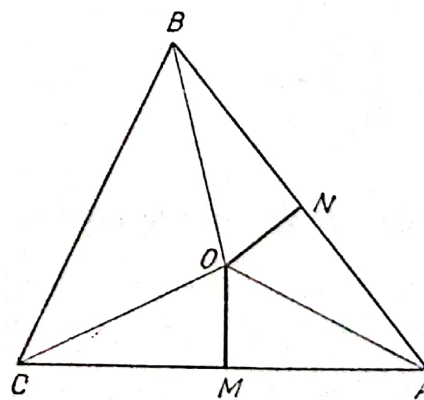


Fig. 76

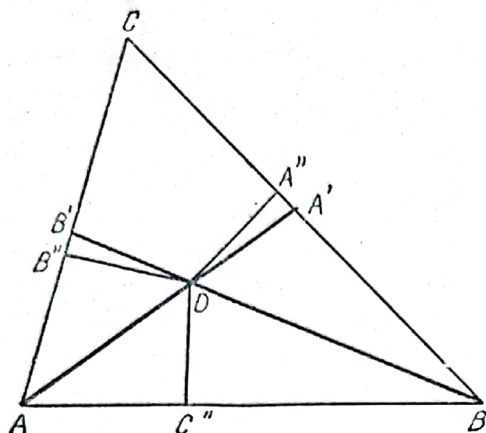


Fig. 77

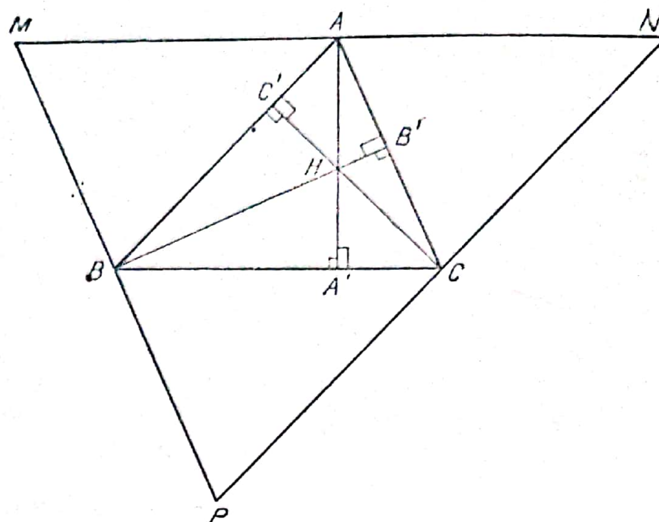


Fig. 78

segmentului AC) de unde $BO = OC$. Deci O se găsește și pe mediatoarea laturii BC fiind egal depărtat de punctele B și C.

3) *Bisectoarele unghiurilor interioare ale unui triunghi sînt concurente.*

Fie triunghiul ABC și bisectoarele AA' și BB' care se întîlnesc într-un punct D (fig. 77). Din D ducem distanțele la laturi, DC'', DA'', DB''.

Pe baza proprietății punctelor de pe bisectoare avem:

1) $DC'' = DB''$ (D se află pe bisectoarea unghiului A),

2) $DC'' = DA''$ (D se află pe bisectoarea unghiului B).

Rezultă $DB'' = DA''$ deci D se află și pe bisectoarea unghiului C.

4) *Înălțimile* unui triunghi sînt perpendicularele duse din vîrfurile triunghiului pe laturile opuse.

Înălțimile într-un triunghi sînt concurente într-un punct H.

Fie ABC un triunghi și $AA' \perp BC$, $BB' \perp AC$, $CC' \perp AB$. Pentru a dovedi că AA', BB' și CC' sînt concurente vom dovedi că ele sînt mediatoarele unui triunghi, format ducînd prin vîrfurile triunghiului paralele la laturile opuse. Aceste paralele se întîlnesc două cîte două în punctele M, N, P (fig. 78).

Astfel: $MN \parallel BC$, $NP \parallel AB$, $PM \parallel AC$. Vom avea relațiile:

1) $BC \parallel AN$ și $BC = AN$ ($ANCB$ paralelogram),

2) $BC \parallel AM$ și $BC = AM$ ($AMBC$ paralelogram).

Rezultă: $AM = AN$ și $AA' \perp MN$ (AA' fiind perpendiculară pe BC, este perpendiculară și pe MN, paralelă la BC). Orice înălțime a triunghiului ABC este mediatoare în triunghiul MNP. Dar mediatoarele laturilor unui triunghi sînt concurente. Deci și înălțimile AA', BB', CC' sînt concurente.

Consecințe. 1) Într-un triunghi dreptunghic două din înălțimi sînt cele două catete perpendiculare una pe alta; punctul H se confundă cu vîrful unghiului drept (fig. 79).

2) Înălțimea dusă dintr-un vîrf pe latura opusă va avea piciorul pe latură (între celelalte două vîrfuri ale triunghiului) dacă aceasta este latura unui unghi ascuțit și pe prelungirea laturii dacă este latura unui unghi obtuz.

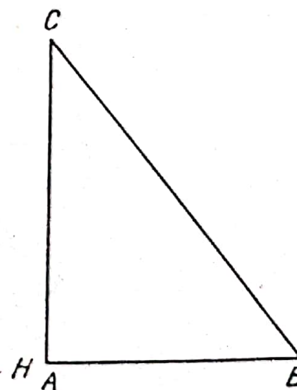


Fig. 79

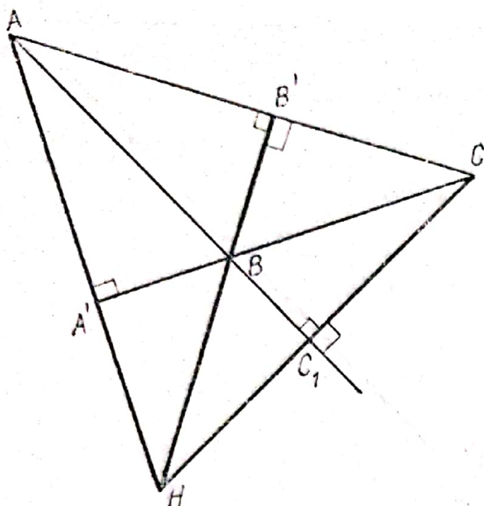


Fig. 80

Punctul H este interior triunghiului dacă toate unghiurile lui sînt ascuțite, este un vîrf al triunghiului dacă triunghiul este dreptunghic, este în afara triunghiului dacă triunghiul are un unghi obtuz (fig. 80).

3) Într-un triunghi isoscel, mediana, bisectoarea și înălțimea duse din vîrful comun laturilor egale se confundă.

În adevăr, am văzut că bisectoarea unghiului format de laturile egale este și mediatoarea laturii opuse deci ea este și mediană căci trece prin mijlocul laturii opuse. Este și înălțime căci este perpendiculară pe latura opusă.

Aplicații

1) *Un triunghi echilateral ABC este așezat cu vîrful A într-un plan P astfel ca laturile AB și AC să formeze cu planul P unghiuri de 45°. Să se demonstreze că latura BC este paralelă cu planul P și că proiecția triunghiului ABC pe planul P este un triunghi dreptunghic.*

Fie triunghiul echilateral ABC, planul P și $A \in P$ (fig. 81). Proiecțiile punctelor B și C pe plan sînt B' și C'.

$\Delta CC'A$ și $\Delta ABB'$ sînt dreptunghice, isoscele ($CC' \perp C'A$, $\widehat{CAC'} = 45°$, $BB' \perp AB'$, $\widehat{BAB'} = 45°$) egale ($AC = AB$ din ipoteză, $\widehat{C'AC} = \widehat{BAB'} = 45°$). Rezultă $CC' = BB'$. Patrulaterul $CBB'C'$ este paralelogram ($CC' \underline{\parallel} BB'$) deci $BC \parallel B'C'$. Așadar $BC \parallel P$.

Triunghiul ABC se proiectează după triunghiul $AB'C'$ egal cu ACC' ($C'B' = BC = AC$ $AC' = AC'$ (comun) $AB' = BB' = CC'$) deci

$$\widehat{C'AB'} = \widehat{CC'A} = 1 \text{ dr.}$$

2) *Să se demonstreze că suma distanțelor unui punct de pe baza unui triunghi isoscel, la laturile egale ale triunghiului este constantă (egală cu înălțimea triunghiului relativă la una din laturile egale).*

Fie triunghiul isoscel ABC și un punct $M \in BC$ (fig. 82) $MB' \perp AC$; $MC' \perp AB$; ducem înălțimea CC_1 și prin M, $MD \parallel AB$ ($D \in CC_1$).

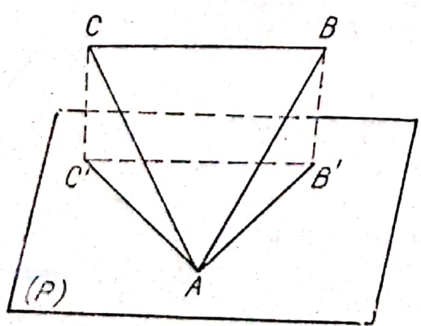


Fig. 81

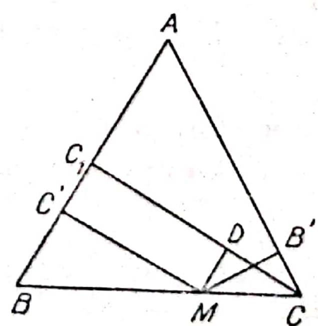


Fig. 82

Patrulaterul $C_1C'MD$ este paralelogram deci $DC_1 = MC'$. Trebuie să demonstrăm că $CD = MB'$. Dar $\Delta CDM = \Delta CMB'$ pentru că:

1) $\hat{B}' = \hat{D} = 1$ dr ($MB' \perp AC$, $MD \parallel AB$ şi $AB \perp CC_1$),
2) $MC = MC$ (latură comună),
3) $\widehat{B'CM} = \widehat{DMC}$ ($\widehat{DMC} = \hat{B}$ corespondente $MD \parallel AB$ tăiate de CB şi $\hat{B} = \hat{C}$ din ipoteză).

Rezultă $MB' = CD$ (se opun în triunghiuri egale la unghiuri egale).

$$CC_1 = CD + DC_1, \quad CC_1 = MB' + MC'.$$

Teorema lui Tales. *Dacă ducem într-un triunghi o paralelă la o latură a triunghiului, atunci ea determină pe celelalte două laturi segmente proporţionale.*

Fie triunghiul ABC (fig. 83). Dacă $DE \parallel BC$ atunci:

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Nu dăm demonstraţia acestei teoreme.

Din $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$ se obţin proporţiile derivate:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ sau } \frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

care exprimă alte forme ale teoremei lui Tales.

Reciproca teoremei lui Tales

Dacă o dreaptă împarte două laturi ale unui triunghi în acelaşi raport, atunci dreapta este paralelă cu a treia latură a triunghiului.

Fie triunghiul ABC şi punctele D, E ($D \in AB$, $E \in AC$) astfel încît $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, trebuie să demonstrăm că $DE \parallel BC$ (fig. 84). Dacă DE nu e paralelă cu BC, ducem prin D o dreaptă $DE' \parallel BC$. Conform teoremei directe $\frac{AE'}{E'C} = \frac{AD}{DB}$. Dar din ipoteză $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$.

Deci $\frac{AE'}{E'C} = \frac{AE}{EC}$ posibil numai dacă E coincide cu E', aşadar $DE \parallel BC$.

Poligoane asemenea

Numim poligoane asemenea poligoanele care au unghiurile respectiv egale două cîte două şi laturile omologe, proporţionale. Raportul a două laturi omologe se numeşte raport de asemănare. Semnul de asemănare este $\sim$.

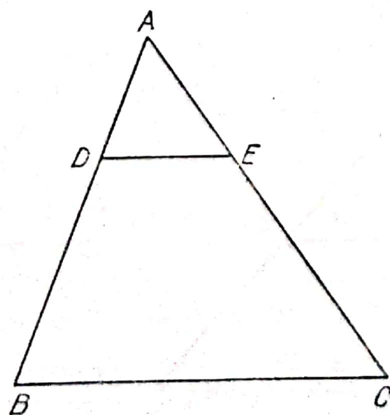


Fig. 83

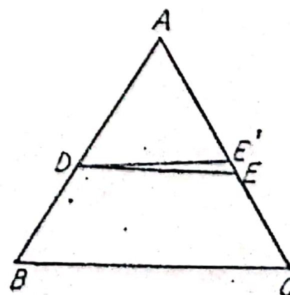


Fig. 84

În cazul triunghiurilor, condițiile suficiente ca două triunghiuri să fie asemenea sînt date de teoreme numite și cazurile de asemănare. Demonstrarea acestor cazuri de asemănare a triunghiurilor se bazează pe *teorema fundamentală a asemănării:*

O paralelă la o latură a unui triunghi formează cu celelalte două laturi ale triunghiului un triunghi asemenea cu cel dat.

Dacă în ΔABC, $DE \parallel BC$ atunci $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

În adevăr, ducînd $DE \parallel BC$ avem: a) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (o formă a teoremei lui Tales). Prin D ducem $DF \parallel AC$ (fig. 85) avem:

b) $\frac{FC}{CB} = \frac{AD}{AB}$. Dar

c) $FC = DE$ (laturi opuse în paralelogram).

Din (a), (b) și (c) deducem relațiile între laturile triunghiurilor:

1) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB}$.

Cele două triunghiuri au și unghiurile corespunzătoare egale.

2) $\widehat{A} = \widehat{A}$ (comun); $\widehat{D} = \widehat{B}$ și $\widehat{E} = \widehat{C}$ (unghiuri corespondente formate de $DE \parallel BC$ tăiate de AB și AC).

Relațiile 1) și 2) demonstrează că $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

Pentru a demonstra mai departe cazurile de asemănare a triunghiurilor vom folosi un triunghi auxiliar asemenea cu unul din triunghiurile date și egal cu celălalt.

Cazul I. Dacă două triunghiuri au două unghiuri respectiv egale, atunci ele sînt asemenea.

Fie triunghiurile ABC și A_1, B_1, C_1 care au

$\widehat{A} = \widehat{A}_1$; $\widehat{B} = \widehat{B}_1$. Trebuie să demonstrăm că

$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC.$$

Avem $\widehat{C} = \widehat{C}_1 = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180° - (\widehat{A_1} + \widehat{B_1})$.

Pentru a demonstra proporționalitatea laturilor luăm pe AB un segment $AB' = A_1B_1$; prin B' ducem $B'C' \parallel BC$ (fig. 86). Pe baza teoremei fundamentale a asemănării $\Delta AB'C' \sim \Delta ABC$. $\Delta AB'C' = \Delta A_1B_1C_1$ pentru că $AB' = A_1B_1$ din construcție: $\widehat{A} = \widehat{A}'$ din ipoteză, $\widehat{B}' = \widehat{B}_1$ ($\widehat{B}' = \widehat{B}$ corespondente $B'C' \parallel BC$ tăiate de AB iar $\widehat{B} = \widehat{B}_1$ din ipoteză). Rezultă:

$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC.$$

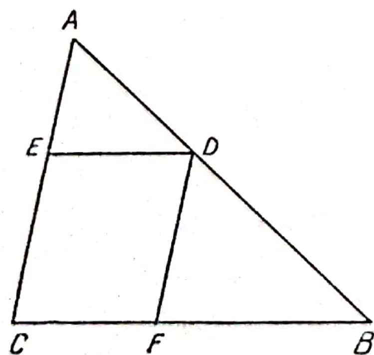


Fig. 85

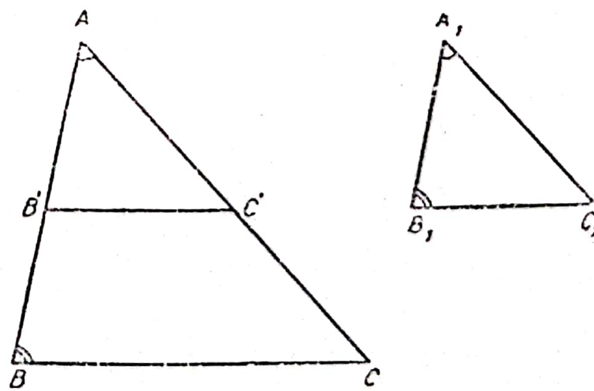


Fig. 86

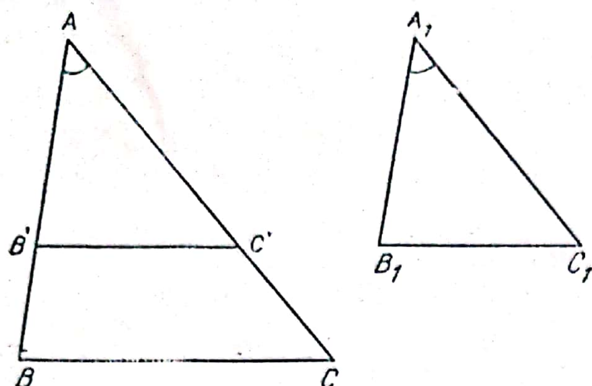


Fig. 87

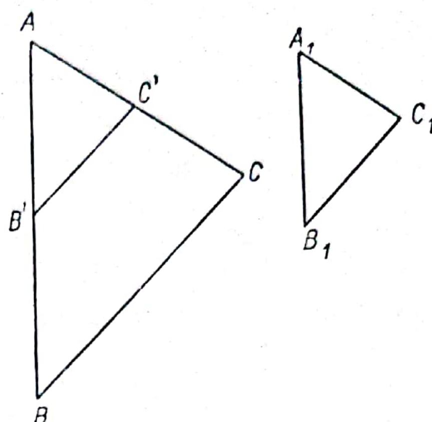


Fig. 88

Cazul II. Dacă două triunghiuri au cîte un unghi egal cuprins între laturi proporționale, atunci ele sînt asemenea.

Fie triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ astfel ca $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}$ și $\widehat{A}=\widehat{A}_1$. Trebuie să demonstrăm că $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Luăm pe AB segmentul $AB' = A_1B_1$. Prin B' ducem $B'C' \parallel BC$ (fig. 87). $\Delta AB'C' \sim \Delta ABC$. Dar $\Delta AB'C' = \Delta A_1B_1C_1$ pentru că:

$AB' = A_1B_1$ din construcție; $\widehat{A}=\widehat{A}_1$ (ipoteză)

$A_1C_1 = AC'$ (ducînd $B'C' \parallel BC$ $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}$ dar $AB' = A_1B_1$ și $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}$ deci $\frac{AC'}{AC}=\frac{A_1C_1}{AC}$). Rezultă $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Cazul III. Dacă două triunghiuri au laturile proporționale, atunci ele sînt asemenea.

Fie triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, astfel ca $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$. Trebuie să demonstrăm că $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Luăm pe AB segmentul $AB' = A_1B_1$ și ducem prin B' dreapta $B'C' \parallel BC$ (fig. 88). Rezultă $\Delta ABC \sim \Delta AB'C'$ deci (1) $\frac{AB'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A}{CA}$. Dar $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB'C'$ pentru că:

1° $AB' = A_1B_1$ din construcție, din ipoteză și din relațiile (1) deducem: $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A}{CA}$

de unde 2°) $B_1C_1 = B'C'$ și 3°) $C_1A_1 = C'A$ rezultă

$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC.$$

Consecințe. 1) Dacă două triunghiuri dreptunghice au cîte un unghi ascuțit egal, ele sînt asemenea.

2) Dacă două triunghiuri dreptunghice au catetele proporționale, ele sînt asemenea.

3) Triunghiurile isoscele ABC și $A'B'C'$ (A și A' fiind vîrfurile formate de laturile egale) sînt asemenea dacă au a) $\widehat{A}=\widehat{A'}$ sau b) $\widehat{B}=\widehat{B'}$.

4) Toate poligoanele regulate (poligon regulat este poligonul care are laturile egale și unghiurile egale) cu același număr de laturi sînt asemenea.

În adevăr dacă poligoanele au n vîrfuri, fiecare unghi va fi egal cu: $\frac{(n-2)180°}{n}$ iar raportul de asemănare va fi raportul format de o latură a unui poligon și o latură a celuilalt.

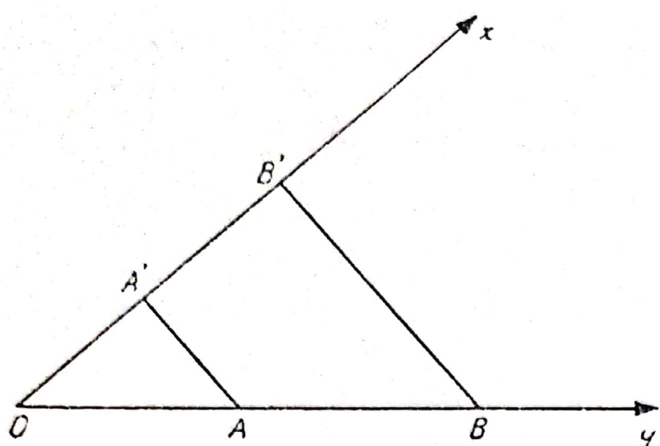


Fig. 89

Rapoarte trigonometrice

Fie un unghi ascuțit $\widehat{xOy} = \alpha$. Ducînd din două puncte oarecare ale semidreptei Oy perpendicularele pe Ox, se obțin două triunghiuri asemenea; raportul a două laturi ale unui triunghi este egal cu raportul laturilor omologe din celălalt triunghi.

În adevăr, fie punctele $A, B \in Oy$ și $AA' \perp Ox$, $BB' \perp Ox$ (fig. 89) atunci $AA' \parallel BB'$ deci:

$$\Delta OAA' \sim \Delta OBB'.$$

1) $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$. Din (1) rezultă

1° $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$ deci raportul dintre cateta alăturată unui unghi dat și ipotenuză este constant indiferent de măsura acestor segmente. Acest raport constant îl numim *cosinusul* unghiului α și-l notăm cos α.

2° $\frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB}$, deci raportul dintre cateta opusă unghiului α și ipotenuză este constant; îl numim *sinusul* de α și-l notăm sin α.

3° $\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'}$, deci raportul dintre cateta opusă unghiului α și cateta alăturată este constant, îl numim *tangenta* de α și l notăm tg α.

4° $\frac{OA'}{AA'} = \frac{OB'}{BB'}$, deci raportul dintre cateta alăturată unghiului α și cateta opusă este constant; îl numim *cotangenta* de α și-l notăm ctg α.

În triunghiul ABC, dreptunghic în A, vom avea rapoartele:

1) $\frac{AB}{CB} = \sin \widehat{C} = \cos \widehat{B}$; $\quad \frac{AC}{CB} = \sin \widehat{B} = \cos \widehat{C}$;

2) $\frac{AB}{AC} = \text{tg}\, \widehat{C} = \text{ctg}\, \widehat{B}$; $\quad \frac{AC}{AB} = \text{tg}\, \widehat{B} = \text{ctg}\, \widehat{C}$.

Din relațiile 1 și 2 rezultă:

1) O catetă este egală cu ipotenuza înmulțită cu sinusul unghiului opus acestei catete sau cu cosinusul unghiului alăturat acestei catete: $AB = CB \sin \widehat{C} = CB \cos \widehat{B}$.

2) Ipotenuza este egală cu raportul dintre o catetă și sinusul unghiului opus acestei catete sau cu raportul dintre o catetă și cosinusul unghiului alăturat catetei.

Observații. Cum raportul dintre o catetă și ipotenuză este totdeauna subunitar, sinusul și cosinusul unui unghi al triunghiului sînt subunitare.

Rezolvarea triunghiului dreptunghic

A rezolva un triunghi dreptunghic cînd se dau anumite elemente (2 elemente diferite de unghiul drept) înseamnă a găsi valorile tuturor elementelor triunghiului.

Exemple. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90°$) cînd se cunosc:
a) $AB = 3$ m, $AC = 4$ m, b) $AB = 3$ m, $CB = 5$ m,
c) $AB = 3$ m, $\hat{B} = 53°30'$, d) $BC = 5$ m, $\hat{B} = 37°$.

a) Cunoscînd cele două catete, putem afla unghiurile prin tangentă sau cotangentă

$$\frac{AB}{AC} = \text{tg } \hat{C} = \text{ctg } \hat{B}; \quad \frac{3}{4} = 0{,}75 = \text{tg } C = \text{ctg } B.$$

În tabelul de la sfîrşitul manualului şcolar găsim:

$0{,}740 = \text{tg } 36°30'$ şi $0{,}754 = \text{tg } 37°$. Putem lua pentru $\hat{C}$ unghiul $37°$ (cu aproximaţie prin adaos).

Unghiul $\hat{B}$ se poate afla fie din tabel fie calculînd complementul unghiului de $37°$:
$\hat{B} = 90° - 37° = 53°$.

Pentru a calcula ipotenuza luăm:

$$BC = \frac{AB}{\sin \hat{C}}, \quad BC = \frac{3}{\sin 37°}, \quad BC = \frac{3}{0{,}602} = \frac{3000}{602} = \frac{1500}{301} \approx 5\text{m}.$$

b) $AB = 3$ m, $CB = 5$ m.
Calculăm unghiurile:

$\sin \hat{C} = \cos \hat{B} = \frac{3}{5} = 0{,}6$. Căutăm în tabele unghiurile corespunzătoare şi găsim:

$0{,}602 = \sin 37°$, $0{,}602 = \cos 53°$, deci $\hat{C} \approx 37°$, $\hat{B} \approx 53°$.

Calculăm cateta AC.

$AC = CB \cos \hat{C}$, $AC = 5 \cos 37° \approx 5 \cdot 0,\ 799 \approx 3{,}995$, $AC \approx 4$ m.

c) $AB = 3$ m, $\hat{B} = 53°30'$.
Calculăm unghiul C.

$$\hat{C} = 89°60' - 53°30' = 36°30'.$$

Calculăm laturile

$$AC = AB \text{ tg } \hat{B}, \quad AC = 3 \text{ tg } 53°30' \approx 3 \cdot 1{,}351 = 4{,}053, \quad AC \approx 4 \text{ m}.$$

$$BC = \frac{AB}{\sin C}, \quad BC = \frac{3}{\sin 36°30'}, \quad BC \approx \frac{3}{0{,}595} = \frac{3000}{595}, BC \approx 5 \text{ m}.$$

d) $BC = 5$ m, $\hat{B} = 37°$.

$\hat{C} = 90° - 37° = 53°$. Calculăm laturile:

$AB = CB \cos \hat{B}$, $AC = CB \sin \hat{B}$,
$AC = 5 \cos 37° \approx 5 \cdot 0{,}799 \approx 4$ m,
$AC = 5 \sin 37° \approx 5 \cdot 0{,}602 \approx 3$ m.

Aplicații

1) *Raportul perimetrelor a două poligoane asemenea este egal cu raportul a două laturi omologe (raportul de asemănare).*

Dacă poligonul $ABCD... L$ este asemenea cu poligonul $A'B'C'D'... L'$. Vom avea (aplicînd proprietatea șirului de rapoarte egale):

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\ldots=\frac{KL}{K'L'}=\frac{AB+BC+CD+\ldots+KL}{A'B'+B'C'+C'D'+\ldots+K'L'}=\frac{p}{p'}$$

unde am notat cu $2p$ și $2p'$ perimetrele celor două poligoane.

2) *Într-un trapez punctul de intersecție a diagonalelor:*

a) *este vîrful a două triunghiuri asemenea care au laturile opuse acestui vîrf bazele trapezului;*

b) *împarte paralela dusă prin el la bază în două segmente egale.*

Fie trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) cu diagonalele AC și BD concurente în I (fig. 90).

1) $\Delta ABI \sim \Delta CDI$ ($\hat{I}_1=\hat{I}_2$ opuse la vîrf, $\hat{B}_1=\hat{D}_1$ alterne interne).

2) Paralela prin I la AB taie laturile AD, BC respectiv în E și F. În triunghiul ABD, $EI \parallel AB$ deci:

1) $\frac{EI}{AB}=\frac{DI}{DB}$.

În triunghiul ABC, $IF \parallel AB$ deci:

2) $\frac{IF}{AB}=\frac{CI}{CA}$.

Dar din asemănarea triunghiurilor ABI și CDI avem:

$$\frac{IC}{IA}=\frac{ID}{IB} \text{ formînd o proporție derivată:}$$

3) $\frac{IC}{AC}=\frac{ID}{DB}$.

Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă $\frac{EI}{AB}=\frac{IF}{AB}$, deci $EI=IF$.

3) *Fiind dat un trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) cu baza mare CD, dacă prelungim laturile DA, CB, ele se întîlnesc într-un punct E. Să se arate că mediana din E a triunghiului DEC taie orice paralelă la bază în două părți egale. Să se facă legătura cu problema precedentă.*

În triunghiul DEC ducem mediana EM și o paralelă la DC care taie pe AD, EM, și BC respectiv în F, G și H (fig. 91).

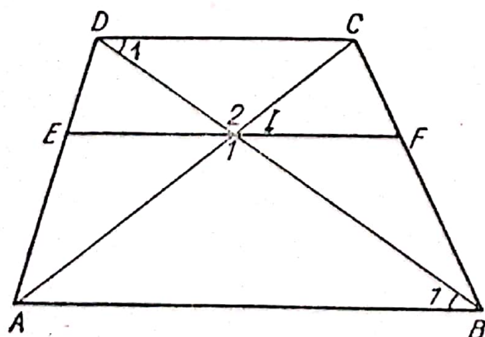


Fig. 90

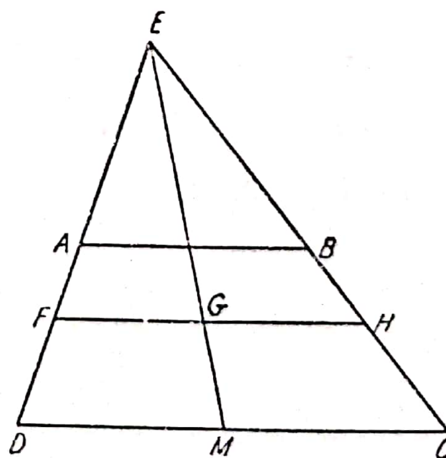


Fig. 91

Pe baza teoremei fundamentale a asemănării:

1) $\frac{FG}{DM} = \frac{EG}{EM}$ şi 2) $\frac{GH}{MC} = \frac{EG}{EM}$ din (1) şi (2) ţinînd seama că $DM = MC$ obţinem:

$FG = GH$. Cum paralela la BC am dus-o printr-un punct oarecare al medianei EM, înseamnă că toate punctele ei se bucură de această proprietate. Rezultă, ţinînd seama şi de aplicaţia 2) că: mediana triunghiului obţinut prin prelungirea laturilor unui trapez relativă la o bază a trapezului trece prin punctul de intersecţie a diagonalelor trapezului.

4) *Pe ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic ABC se consideră un punct oarecare M. Simetricele punctului M faţă de AB şi AC sînt respectiv N şi P. Se notează cu D intersecţia dreptelor AB şi MN, iar cu E intersecţia dreptelor AC şi MP. Să se arate că:*

a) *triunghiurile MAN şi MAP sînt isoscele;*
b) *punctele N, A şi P sînt coliniare;*
c) *triunghiurile ADN şi AEP sînt egale.*

(Concurs de matematică cl. a VI-a, etapa locală, Bucureşti 1969).

a) Triunghiurile MAN şi MAP au din construcţie medianele AD, AE şi înălţimi deci sînt triunghiuri isoscele (fig. 92). Se mai poate afirma că cele două triunghiuri, avînd AD respectiv AE axe de simetrie, sînt isoscele.

b) Vom dovedi că $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 1$ dr. Atunci NA şi AP sînt în prelungire căci formează un unghi egal cu 2 dr.

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_3 \quad \text{şi} \quad \hat{A}_4 = \hat{A}_2. \quad \text{Dar} \quad \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = 1 \text{ dr.} \quad \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 1 \text{ dr.}$$

$\widehat{NAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAP} = 2$ dr deci AN, AP sînt în prelungire.

c) $\Delta AND = \Delta APE$ căci sînt triunghiuri dreptunghice care au

1) $\hat{A}_1 = \widehat{APE}$ (avînd acelaşi complement $\hat{A}_2$).

Triunghiurile NAM şi MAP fiind isoscele cu vîrful în A, avem:

$$AN = AM \text{ şi } AM = AP \text{ deci}$$

2) $AN = AP$

Cele două triunghiuri au ipotenuzele egale şi cîte un unghi ascuţit egal deci sînt egale.

5) *În triunghiul isoscel ABC (AB = AC), înălţimile AD şi BE se intersectează în punctul H. Ştiind că AD = BC = a, să se arate că:*

1) *Triunghiurile ADC şi BDH sînt asemenea*
2) *AH = 3 HD*; 3) *AB + AE = 2 BE.*

(Concurs de matematică cl. a VII-a, etapa locală, Bucureşti, 1969).

1) În triunghiul ABC ($AD \perp BC$ şi $BE \perp AC$) avem $AD = BC = a$ şi $AB = AC$. (fig. 93).

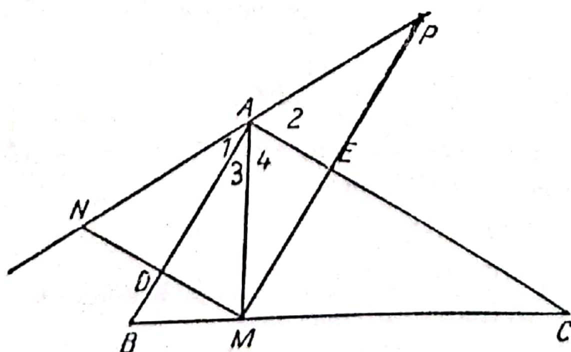


Fig. 92

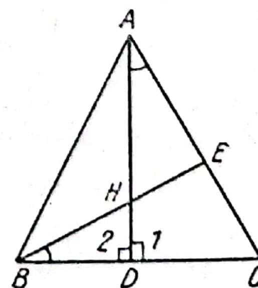


Fig. 93

$\Delta ADC \sim \Delta BDH$: $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 1$ dr, $\widehat{DAC} = \widehat{DBH}$ (au același complement, unghiul $\hat{C}$).

Triunghiurile fiind dreptunghice, avînd cîte un unghi ascuțit egal, sînt asemenea.

2) $\Delta AHE \sim \Delta ADC$ (triunghiuri dreptunghice cu $\widehat{DAC}$ comun).

Rezultă: $\frac{AH}{AC} = \frac{HE}{DC} = \frac{AE}{AD}$ Dar $DC = \frac{a}{2}$; $AD = a$ și $AC = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

deci $\frac{AH}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{HE}{\frac{a}{2}} = \frac{AE}{a}$ Din ultimele două rapoarte obținem $AE = 2HE$.

Dar $\Delta BHD \sim \Delta AHE$ (din 1 și 2). Rezultă

$$\frac{HD}{HE} = \frac{BD}{AE} \text{ sau } \frac{HD}{HE} = \frac{\frac{a}{2}}{2HE}; \ HD = \frac{a}{4}.$$

Dacă $HD = \frac{a}{4}$, avem $AH = a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$ și $\frac{AH}{HD} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{4}{a} = 3$.

3) $AB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $AE = \frac{AD \cdot AH}{AC}$ (2)

deci:

$$AE = \frac{a \cdot \frac{3a}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{3a}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}\,a}{2 \cdot 5} \text{ și } BE = \frac{BC \cdot AD}{AC} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$AB + AE = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}\,a}{2 \cdot 5} \text{ și } 2\,BE = \frac{4a\sqrt{5}}{5} \text{ deci } AB + AE = 2BE.$$

Observare. Relația $BE = \frac{BC \cdot AD}{AC}$ exprimă că într-un triunghi produsul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare este constant (este egal cu dublul ariei triunghiului). Ea poate fi dedusă și din asemănarea triunghiurilor BEC și ADC $\left(\frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC}\right)$.

Relații metrice într-un triunghi dreptunghic

1) T e o r e m a c a t e t e i. *O catetă este medie proporțională între ipotenuză și proiecția ei pe ipotenuză:*

$$AB^2 = BC \cdot BD, \qquad AC^2 = BC \cdot DC.$$

2) T e o r e m a î n ă l ț i m i i. *Înălțimea relativă la ipotenuză este medie proporțională între segmentele determinate de ea pe ipotenuză:*

$$AD^2 = BD \cdot DC.$$

3) T e o r e m a l u i P i t a g o r a. *Pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor:*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

1) Pentru demonstrarea primei teoreme observăm că segmentele AB, BC fac parte din triunghiul ABC iar AB, BD din triunghiul ABD (fig. 94).

$\Delta ABC \sim \Delta ABD$ ($\hat{B}$ comun şi $\hat{C} = \widehat{BAD}$ avînd acelaşi complement, $\widehat{DAC}$.)
Rezultă:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}.$$

Fig. 94

Relaţia $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$ exprimă concluzia din teorema catetei. Analog relaţia $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$.

Observaţie. Relaţia $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AC}$ este foarte utilă în aplicaţii, ea exprimă că: într-un triunghi dreptunghic produsul dintre ipotenuză şi înălţimea corespunzătoare este egal cu produsul catetelor.

2) Segmentele AD, BD şi AD, DC fac parte din triunghiurile asemenea ABD şi ADC.

$\Delta ABD \sim \Delta ADC$ ($\widehat{BAD} = \hat{C}$; $\hat{B} = \widehat{DAC}$ avînd acelaşi complement).

Rezultă relaţia: $\frac{AD}{CD} = \frac{DB}{AD}$.

3) Adunînd membru cu membru relaţiile

$$AB^2 = BC \cdot BD,$$

$$AC^2 = BC \cdot DC, \text{ obţinem}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC\ (BD + DC) \text{ sau } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

căci $BD + DC = BC$.

Reciproc, dacă într-un triunghi cu laturile a,b,c avem relaţia $a^2 = b^2 + c^2$, triunghiul este dreptunghic în A.

Aplicaţii

1) *Un triunghi dreptunghic are catetele b,c. Pe perpendiculara ridicată în vîrful unghiului drept pe planul triunghiului se ia distanţa d. Să se afle distanţa de la un punct, situat pe perpendiculară, la ipotenuza triunghiului dat.*

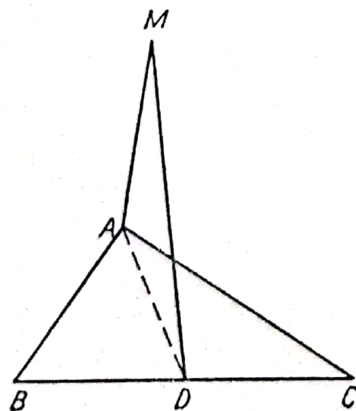


Fig. 95

Distanţa de la un punct la o dreaptă este mărimea segmentului din perpendiculara dusă din punct pe dreaptă. Fie triunghiul ABC, M punctul şi $MD \perp BC$. Punctul D este piciorul înălţimii dusă din A pe BC.

În adevăr, $MA \perp ABC$ şi $AD \perp BC$, rezultă, pe baza teoremei celor trei perpendiculare, că $MD \perp BC$ (fig. 95).

Pentru a calcula măsura segmentului MD folosim triunghiul dreptunghic MAD unde $MD^2 = MA^2 + AD^2$ sau înlocuind $MA = d$ şi $AD = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ unde $a^2 = b^2 + c^2$):

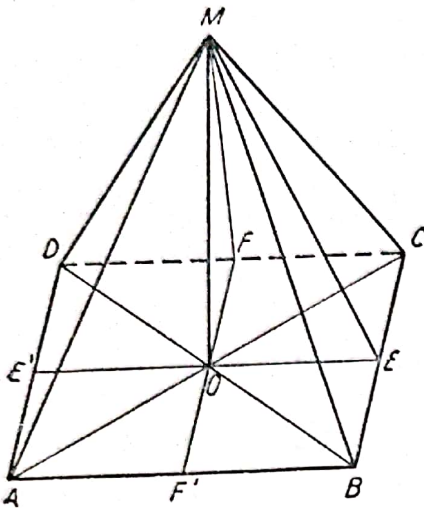


Fig. 96

$$MD^2 = d^2 + \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2};$$

$$MD = \sqrt{\frac{d^2b^2 + d^2c^2 + b^2c^2}{b^2 + c^2}}.$$

2) *Se consideră un dreptunghi ABCD cu dimensiunile AB = 40 cm, BC = 16 cm. În centrul O al dreptunghiului se ridică perpendiculara pe planul său și se ia pe ea un segment OM = 15 cm. Se cere distanța de la punctul M la laturile dreptunghiului.*

Pe baza teoremei celor trei perpendiculare ($OM \perp ABCD$ ducem $OE \perp BC$ și $OF \perp DC$) (fig. 96), $ME \perp BC$ și $MF \perp DC$.

Dar $OE = \frac{40}{2} = 20$ cm și $OF = \frac{16}{2} = 8$ cm. Din triunghiurile dreptunghice MOE și MOF avem:

$$ME^2 = 15^2 + 20^2 = 625, \quad ME = \sqrt{625}, \quad ME = 25 \text{ cm}.$$

$$MF^2 = 15^2 + 8^2 = 289, \quad MF = \sqrt{289}, \quad MF = 17 \text{ cm}.$$

Distanțele de la punctul M (care se găsește pe perpendiculara dusă prin centrul dreptunghiului) la laturile paralele ale dreptunghiului sînt egale ca oblice care au picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei. Deci $ME = ME'$ și $MF = MF'$ (notînd cu E' și F' picioarele perpendicularelor duse din M pe AD și AB).

VI
Cercul. Poligoane regulate

Am definit cercul ca figura formată de mulţimea punctelor din plan egal depărtate de un punct al planului, numit centrul cercului.

Printr-un punct al planului putem duce cîte cercuri vrem luînd ca centru orice punct al planului.

Prin două puncte trec cîte cercuri vrem ele au centrele pe mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte; raza unuia din aceste cercuri este segmentul care uneşte centrul (punct al mediatoarei) cu unul din cele două puncte.

Prin trei puncte necoliniare trece un cerc şi numai unul.

În adevăr, există un singur punct egal depărtat de cele trei puncte şi anume punctul de intersecţie a mediatoarelor segmentelor determinate de cele 3 puncte luate două cîte două; cercul va trece prin cele trei puncte care sînt vîrfurile unui triunghi, el este circumscris triunghiului. Deci punctul de intersecţie a mediatoarelor unui triunghi este centrul cercului circumscris triunghiului. Rezultă că trei puncte necoliniare determină un cerc (fig. 97).

Consecinţe. Pentru a afla centrul unui cerc dat luăm trei puncte oarecare pe cerc şi ducem mediatoarele la două din coardele determinate de cele trei puncte. Punctul de intersecţie a mediatoarelor este centrul cercului.

O dreaptă poate avea cu un cerc cel mult două puncte de intersecţie. Dacă are două puncte diferite de intersecţie, dreapta se numeşte secantă. În acest caz distanţa de la centrul cercului la dreaptă este mai mică decît raza cercului (fig. 98). Dacă dreapta are două puncte confundate de intersecţie, dreapta este tangentă la cerc iar distanţa

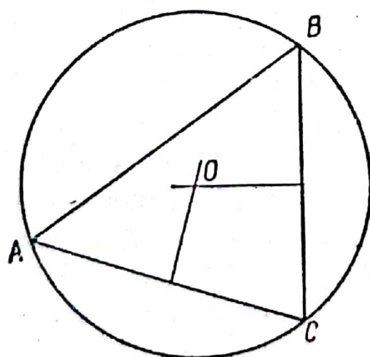


Fig. 97

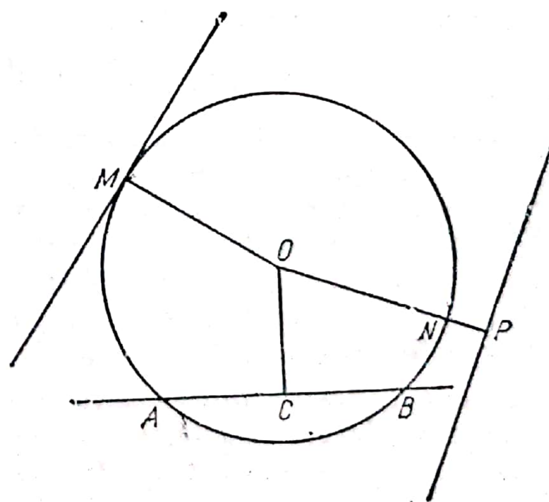


Fig. 98

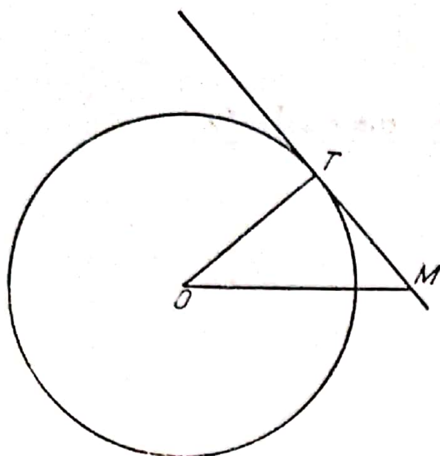


Fig. 99

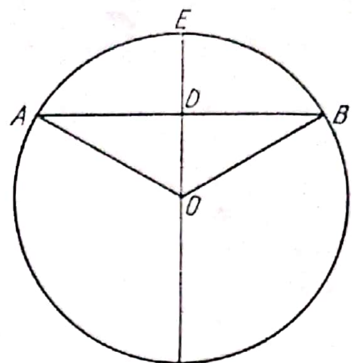


Fig. 100

de la centrul cercului la dreaptă este egală cu raza cercului. Dacă dreapta nu are nici un punct comun cu cercul ea este exterioară cercului. În acest caz, distanța de la centrul cercului la dreaptă este mai mare decît raza cercului.

Notînd cu r raza cercului și d distanța de la centrul cercului la o dreaptă dată,

1) dacă $r < d$, dreapta este secantă,

2) dacă $r = d$, dreapta este tangentă,

3) dacă $r > d$, dreapta este exterioară cercului.

Raza este cea mai mică distanță dintre centrul cercului și un punct al tangentei la cerc. În adevăr, luînd un punct M oarecare pe tangentă diferit de punctul T de tangență, $OM > r$ (fig. 99).

(OT fiind distanța de la O la tangentă, înseamnă că $OT \perp TM$; raza este perpendiculară pe tangentă în punctul de contact.)

T e o r e m ă. *Diametrul perpendicular pe o coardă în cerc împarte coarda și arcul corespunzător în două părți egale.*

Fie coarda AB și $OD \perp AB$, notăm cu D și E intersecțiile diametrului perpendicular pe coardă cu coarda și cu arcul AB (fig. 100). Unim O cu A și B.

Triunghiul AOB este isoscel. Înălțimea OD, dusă din vîrful laturilor egale, este și mediatoare și bisectoare deci:

1) $DA = DB$; 2) $\widehat{AOD} = \widehat{DOB}$ deci $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$

(într-un cerc la unghiuri la centru egale corespund arce egale).

Reciproc, dreapta care unește mijlocul unei coarde cu mijlocul arcului corespunzător trece prin centrul cercului. În adevăr, unind centrul cu D, această dreaptă trece prin E conform teoremei precedente deci ED trece prin O.

T e o r e m ă. *Diametrul cercului este cea mai mare coardă în cerc.*

Fie cercul cu centrul O și coarda AB. Unind O cu A și B, în triunghiul AOB avem $AB < OA + OB$, $AB < 2\,r$ deci AB este mai mic decît diametrul (fig. 101).

T e o r e m ă. *Dacă într-un cerc două coarde sînt paralele, atunci arcele cuprinse între aceste coarde sînt egale.*

Fie cercul O și coardele $AB \| CD$. Ducem diametrul perpendicular pe coarda AB; el va fi perpendicular și pe CD (fig. 102). Acest diametru MN împarte arcele $\overset{\frown}{AB}$

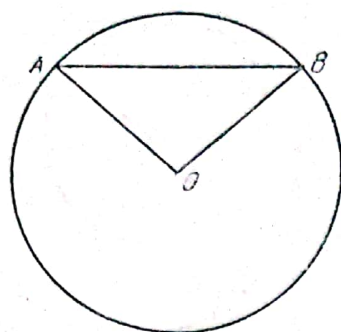


Fig. 101

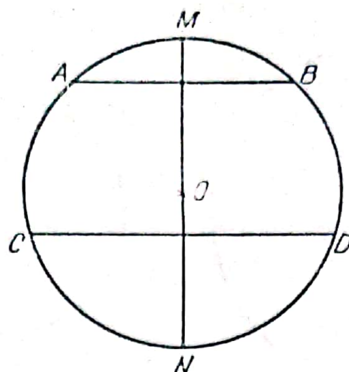


Fig. 102

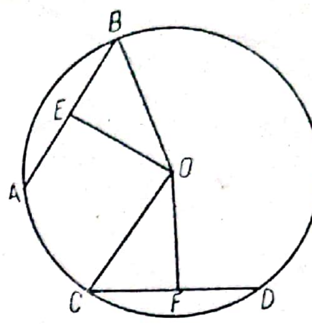


Fig. 103

și $\overset{\frown}{CD}$ în două părți egale: $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ și $\overset{\frown}{CN} = \overset{\frown}{ND}$ iar $\overset{\frown}{MAN} = \overset{\frown}{MBN}$, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{MAN} - (\overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{CN})$, $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{MBN} - (\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{ND})$. Deci $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ (diferență de arce egale).

T e o r e m ă. *În același cerc sau în două cercuri egale, coardele egale sînt egal depărtate de centru și reciproc, coardele egal depărtate de centru sînt egale.*

Fie cercul O și coardele $AB = CD$. Ducem $OE \perp AB$ și $OF \perp CD$ (fig. 103). Triunghiurile OEB și OFC sînt egale fiind triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și cîte o catetă respectiv egale. $OE = OF$ (se opun la unghiuri egale în triunghiuri egale).

Reciproc, dacă $OE = OF$, triunghiurile OEB și OFC sînt egale avînd ipotenuzele și cîte o catetă respectiv egale. Rezultă $EB = FC$, deci și $AB = CD$.

Se poate demonstra că într-un cerc sau în două cercuri egale, coarda mai depărtată de centru este mai mică și reciproc dintre două coarde neegal depărtate de centru coarda mai mare este mai apropiată de centru.

Două cercuri au cel mult două puncte comune căci dacă ar avea trei puncte comune s-ar confunda.

Cercurile care au două puncte comune se numesc secante. Coarda care unește punctele comune se numește coardă comună și este perpendiculară pe dreapta care unește centrele celor două cercuri.

În adevăr, mediatoarea coardei AB din fiecare cerc trece prin centrul cercului respectiv.

Dacă cercurile sînt secante (fig. 104), din triunghiul O_1O_2A avem:

$O_1O_2 < O_1A + O_2A$ deci $d < r_1 + r_2$

$O_1O_2 > O_2A - O_1A$ deci $d > r_2 - r_1$. Am notat cu d distanța dintre centrele celor două cercuri de raze r_1 și r_2. Cercurile care au comune două puncte confundate se numesc tangente (interioare sau exterioare) (fig. 105). Dreapta care unește centrele a două cercuri tangente trece prin punctul de tangență.

În adevăr, în punctul de tangență cele două cercuri au aceeași tangentă iar razele sînt perpendiculare pe această dreaptă în același punct. Dacă cercurile sînt tangente exterioare,

$$d = r_1 + r_2;$$

dacă sînt tangente interioare

$$d = r_2 - r_1 \ (r_2 > r_1).$$

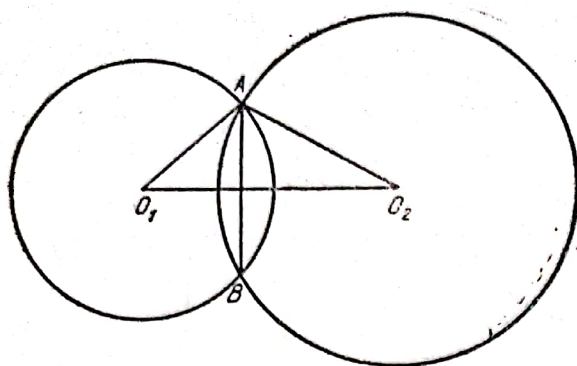


Fig. 104

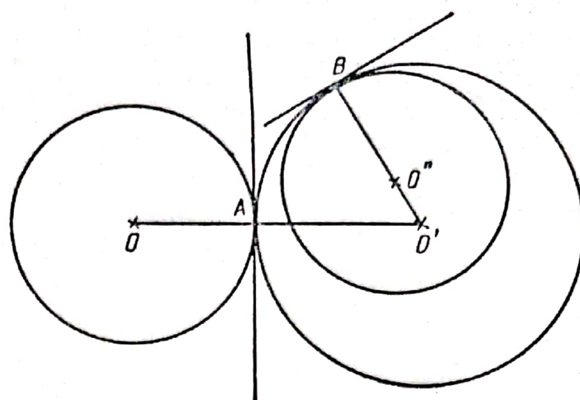


Fig. 105

Dacă cercurile nu au nici un punct comun, ele se numesc interioare, sau exterioare (fig. 106).

Dacă sînt interioare, $d < r_2 - r_1$.

Dacă sînt exterioare, $d > r_1 + r_2$.

Dacă cercurile interioare au același centru ele se numesc concentrice și $d = 0$.

Unghiuri în cerc

Numim unghi înscris în cerc, unghiul care are vîrful pe cerc și laturile secante sau tangente la cerc.

T e o r e m ă. *Unghiul înscris în cerc are ca măsură jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.*

1) Considerăm cazul cînd una din laturi este diametrul cercului. Fie unghiul ACD unde CD este diametru și arcul AD corespunzător unghiului ACD (fig. 107). Unind A cu O avem: a) $\widehat{AOD} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA}$ (unghi exterior triunghiului).

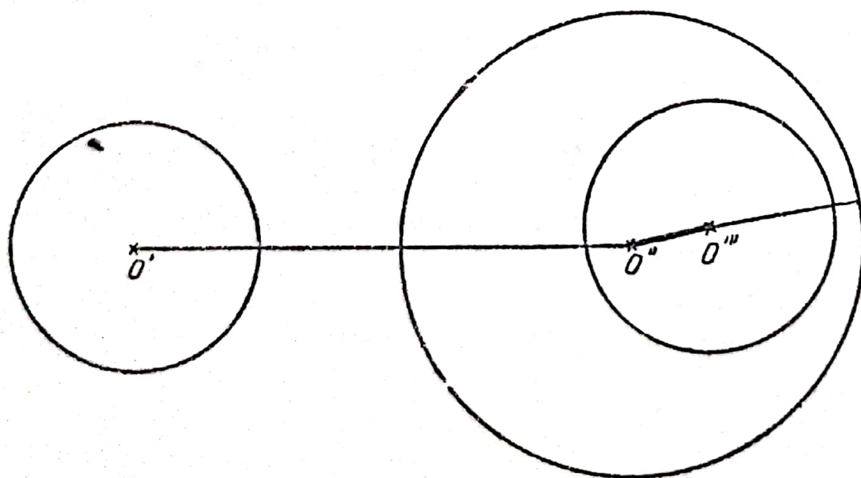


Fig. 106

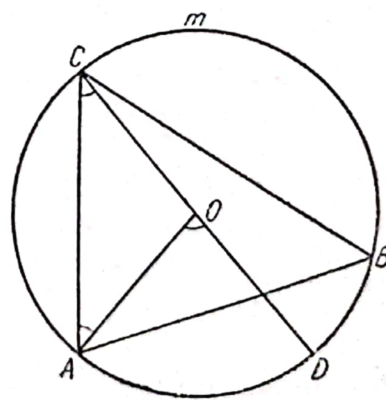


Fig. 107

Dar triunghiul OAC este isoscel deci $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$ și măs $\widehat{AOD} =$ măs $\widehat{AD}$ deci:

$$\text{măs } \widehat{ACD} = \frac{1}{2} \text{ măs } \overset{\frown}{AD}.$$

Dacă considerăm latura CB de aceeași parte sau de partea cealaltă a centrului față de AC, ducînd diametrul prin C,

măs $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}$ măs $\overset{\frown}{AB}$ ca diferență sau sumă de unghiuri înscrise, cu o latură, diametrul cercului.

Consecință: 1) Unghiul ACB are aceeași măsură cînd C se deplasează pe arcul AmB. Segmentul AB se vede din orice punct al arcului AmB sub același unghi de aceea se numește *arc capabil de un unghi dat relativ la segmentul AB.*

2) Unghiurile înscrise într-un semicerc sînt unghiuri drepte.

Patrulater inscriptibil

Dacă un patrulater are toate vîrfurile pe cerc spunem că este înscris în cerc. Am văzut că prin trei puncte trece un cerc și numai unul. Dar prin patru puncte? Condiția necesară și suficientă ca patru puncte să fie conciclice (pe același cerc) este dată de teorema următoare:

Un patrulater înscris în cerc are unghiurile opuse suplementare și reciproc, dacă într-un patrulater unghiurile opuse sînt suplementare, atunci patrulaterul poate fi înscris într-un cerc (este inscriptibil).

În adevăr, fie patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul O (fig. 108).

măs $(\hat{A} + \hat{C}) = \frac{1}{2}$ măs $(\overset{\frown}{DCB} + \overset{\frown}{DAB})$ deci: măs $(\hat{A} + \hat{C}) = 180°$;

$$\text{analog, } \hat{B} + \hat{D} = 180°$$

Reciproc, dacă $\hat{A} + \hat{C} = 180°$, *patrulaterul este inscriptibil.* Considerăm cercul determinat de punctele A,B,D. Punctul C poate să fie exterior, interior sau pe cercul O (fig. 109).

Dacă C este exterior, latura CD taie cercul în C'

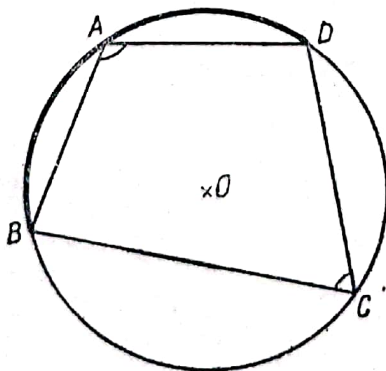


Fig. 108

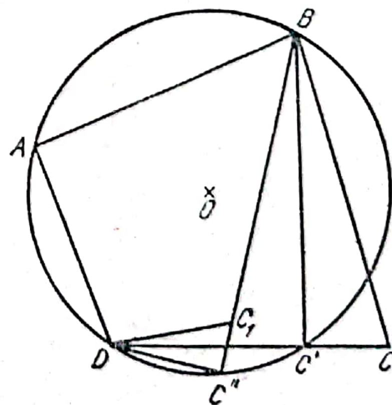


Fig. 109

$\widehat{A} + \widehat{DC'B} = 180°$ (proprietatea directă). Dar $\widehat{DC'B} > \widehat{C}$ ($\widehat{DC'B}$ unghi exterior triunghiului BCC') ar însemna că $\widehat{A} + \widehat{C} < 180°$ ceea ce contrazice ipoteza. Dacă C_1 este interior cercului, latura C_1B taie cercul în C'' și atunci: $\widehat{DC''B} + \widehat{A} = 180°$.

Dar $\widehat{DC''B} < \widehat{DC_1B}$ ($\widehat{DC_1B}$ exterior triunghiului $C_1C''D$) ar însemna $\widehat{A} + \widehat{C_1} > 180°$ ceea ce contrazice ipoteza. Rămîne deci că punctul C este pe cerc ($\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$).

Tangente la cerc. Într-un punct al cercului se poate duce o singură tangentă la cerc. Dintr-un punct exterior se pot duce două tangente la cerc; punctele de tangență sînt punctele de intersecție ale cercului cu cercul avînd ca diametru segmentul care unește punctul exterior cu centrul cercului.

În adevăr, fie O centrul și M punctul exterior. Ducînd cercul de diametru OM, el intersectează cercul O în punctele A și B (fig. 110) și $OA \perp AM$, $OB \perp BM$.

Deci MA și MB sînt tangentele din M la cerc.

T e o r e m ă. *Segmentele din tangentele duse din același punct la un cerc limitate de punct și punctul de tangență sînt egale iar dreapta care unește punctul cu centrul cercului este bisectoarea unghiului format de cele două tangente.*

În adevăr, din M exterior cercului O se duc tangentele MA, MB, $\Delta MAO = \Delta MBO$ (triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv egale), deci $MA = MB$ și $\widehat{AMO} = \widehat{OMB}$ (fig. 110).

Două cercuri diferite pot avea cel mult patru tangente comune (două interioare și două exterioare) și anume: patru tangente comune dacă cercurile sînt exterioare (fig. 111); trei tangente comune dacă cercurile sînt tangente exterioare (una este tangenta în punctul de tangență a celor două cercuri și două tangentele exterioare); două tangente dacă cercurile sînt secante; o tangentă dacă cercurile sînt tangente interioare; (fig. 112, 113) nici o tangentă dacă sînt cercuri interioare netangente.

Aplicații

1) *Într-un patrulater înscris, unghiul format de o diagonală cu o latură este egal cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.*

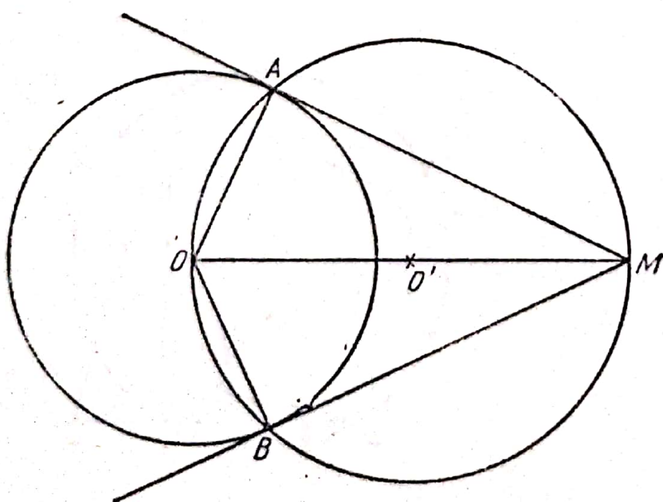


Fig. 110

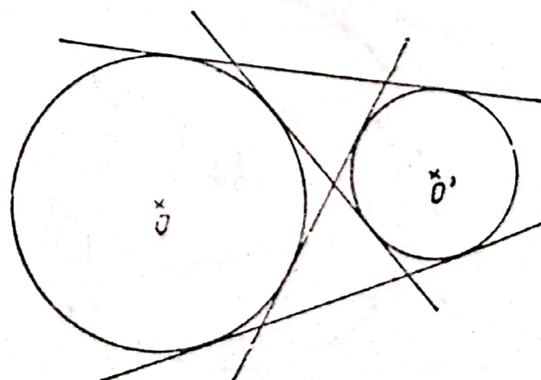


Fig. 111

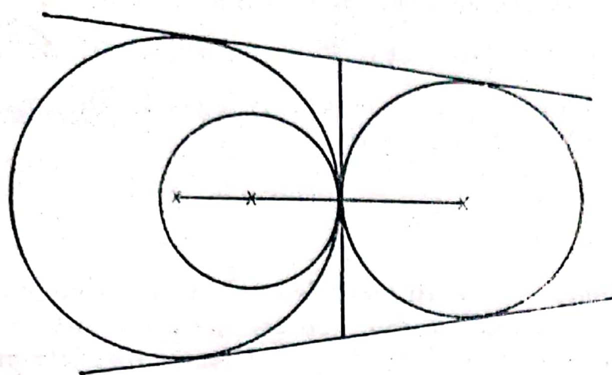


Fig. 112

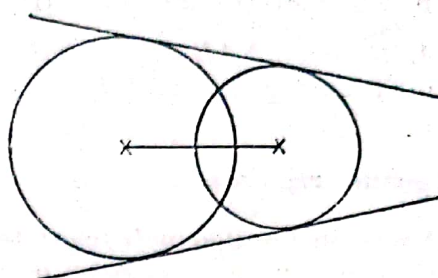


Fig. 113

Reciproc, dacă într-un patrulater o diagonală formează cu o latură a patrulaterului un unghi egal cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă, atunci patrulaterul este inscriptibil.

Dacă $ABCD$ este înscris în cerc avem (fig. 114):

măs $\widehat{ABD}$ = măs $\frac{1}{2}\widehat{AD}$; măs $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}$ măs $\widehat{AD}$ deci

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}.$$

Demonstrarea teoremei reciproce se face prin reducere la absurd asemănător teoremei reciproce anterioare (fig. 114).

2) *În triunghiul ABC se duc înălțimile AA', BB', CC'.*

Să se demonstreze că:

a) *înălțimile triunghiului ABC sînt bisectoarele triunghiului $A'B'C'$ (triunghi ortic determinat de picioarele înălțimilor);*

b) *triunghiurile $AB'C'$, $CA'B'$, $BC'A'$ sînt asemenea cu triunghiul ABC.*

a) Fie triunghiul ABC și înălțimile AA', BB', CC' (fig. 115). Trebuie să demonstrăm că $\widehat{C'A'A} = \widehat{AA'B'}$. Vom dovedi că fiecare din cele două unghiuri sînt egale respectiv cu alte două unghiuri egale între ele.

Dacă notăm cu H punctul de intersecție a înălțimilor (ortocentrul), patrulaterul $HC'BA'$ este inscriptibil ($\widehat{BC'C} = 1$ dr, $\widehat{AA'B} = 1$ dr). Pe baza aplicației 1), $\widehat{C'A'A} = \widehat{C'BB'}$; analog, $\widehat{AA'B'} = \widehat{C'CA}$. Observăm că $\widehat{C'CA} = \widehat{ABB'}$ (avînd același complement, unghiul BAC).

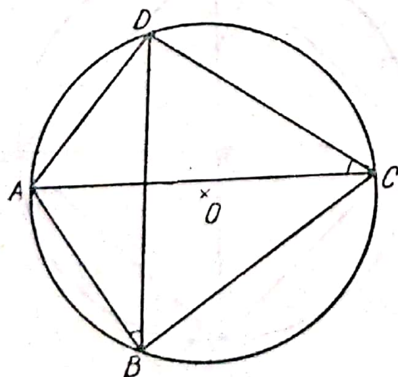


Fig. 114

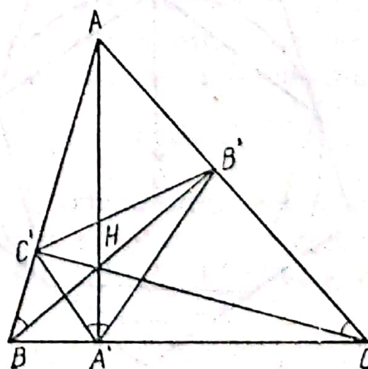


Fig. 115

Fiecare înălțime a triunghiului ABC este bisectoare în triunghiul $A'B'C'$.

b) Patrulaterul $BCB'C'$ fiind inscriptibil (aplicația 1) avem relațiile: $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$, deci $\Delta AB'C' \sim \Delta ABC$ (avînd două unghiuri respectiv egale). Demonstrăm în mod analog că $\Delta CA'B' \sim \Delta ABC$ și $\Delta BA'C' \sim \Delta ABC$.

Poligoane regulate

Am definit poligoanele regulate ca poligoane care au laturile egale și unghiurile egale.

Dacă un cerc este împărțit în părți egale, atunci unind punctele de diviziune consecutive și ducînd tangente prin punctele de diviziune, se obțin două poligoane regulate primul înscris în cerc, al doilea circumscris cercului.

În adevăr, fie cercul O împărțit în n părți egale. Unind consecutiv punctele de diviziune, obținem un poligon care are n vîrfuri pe cerc și n laturi, coarde în cerc. Coardele sînt egale căci se opun în același cerc la arce egale, deci poligonul are toate laturile egale. Un unghi oarecare α al poligonului are ca măsură, ca unghi înscris în cerc, jumătate din măsura arcului subîntins deci măs $\alpha = \frac{n-2}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{(n-2)\,180^\circ}{n}$.

Laturile fiind egale și unghiurile egale, poligonul este regulat. Acest poligon este înscris în cercul O (fig. 116).

Ducînd tangentele în punctele de diviziune, se formează triunghiuri isoscele cu bazele laturile poligonului înscris și laturile egale (tangentele la cerc în extremitățile acestor laturi). Aceste triunghiuri avînd bazele egale și unghiurile alăturate bazelor egale $\left(\text{au ca măsură } \frac{180^\circ}{n}\right)$, sînt triunghiuri egale două cîte două. Unghiurile poligonului sînt egale și laturile egale, ca sume de segmente egale deci poligonul este regulat. El este circumscris cercului O, iar cercul este înscris în acest poligon (raza cercului este apotema poligonului).

Numim apotemă a unui poligon, segmentul din perpendiculara dusă din centrul poligonului pe o latură. Ea este raza cercului înscris în poligon.

Pătratul înscris. Fie cercul O de rază R. Ducînd prin O doi diametri perpendiculari, aceștia împart cercul în patru părți egale (fiecare diviziune avînd ca mărime 90°). (fig. 117). Triunghiul OAB este un triunghi dreptunghic isoscel ($OA = OB$ ca raze). Vom avea:

$AB^2 = 2\,OA^2; \quad AB^2 = 2R^2; \; AB = R\sqrt{2}; \; l_4 = R\sqrt{2}.$

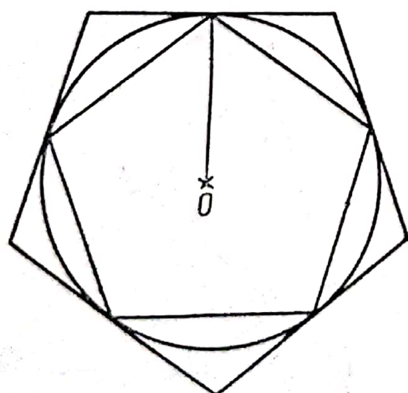


Fig. 116

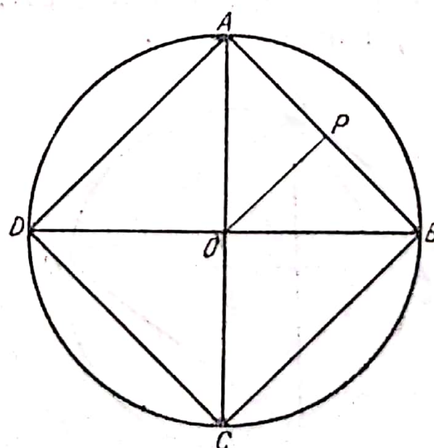


Fig. 117

Ducînd $OP \perp AB$, apotema $OP = \frac{R\sqrt{2}}{2}$: $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

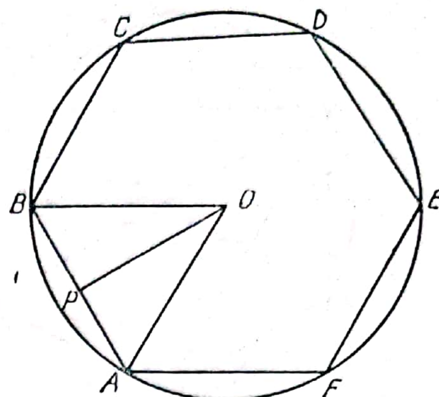


Fig. 118

Observare. În triunghiul dreptunghic isoscel AOP:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{şi } \operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1.$$

Hexagonul regulat înscris. Fie cercul O împărţit în şase părţi egale prin punctele de diviziune $ABCDEF$ (fig. 118). Fiecare arc de cerc cuprins între două puncte de diviziune consecutive are 60°. Unind prin segmente de dreaptă punctele consecutive se obţine hexagonul $ABCDEF$.

Formăm triunghiul isoscel OAB în care $OA = OB$ (raze) iar $\widehat{AOB} = 60°$ (unghi la centru).

Rezultă că triunghiul AOB este echilateral aşadar $AB = l_6 = R$.

Ducem apotema OP; $OP^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$, $a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} R$.

Observare. În triunghiul dreptunghic OPB avem

$$\widehat{POB} = 30°, \quad \widehat{PBO} = 60° \quad \text{deci} \quad \sin 30° = \cos 60° = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}, \quad \sin 60° = \cos 30° =$$

$$= \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \operatorname{ctg} 60° = \operatorname{tg} 30° = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \ \operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\frac{R}{2}} = \sqrt{3}.$$

Regăsim propoziţia: Într-un triunghi dreptunghic, care are un unghi de 30°, cateta care se opune unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză.

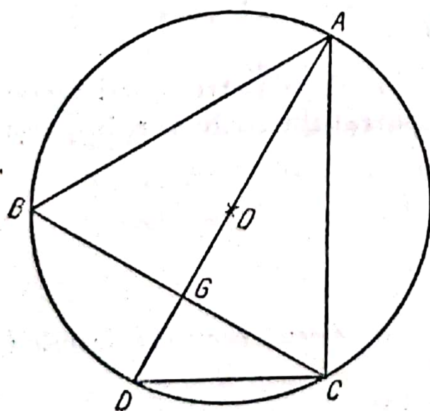


Fig. 119

Triunghiul echilateral înscris. Împărţim un cerc în şase părţi egale purtînd, cu compasul, raza cercului drept coardă apoi unim punctele de diviziune din două în două. Obţinem arce care au măsura $\frac{360°}{3} = 120°$.

Pentru a calcula latura triunghiului echilateral l_3, o încadrăm într-un triunghi dreptunghic ducînd diametrul AD (fig. 119). Triunghiul ADC este dreptunghic în C. Avem:

$$AC^2 = AD^2 - DC^2 \text{ sau } AC^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2;$$

$$l_3 = R\sqrt{3}.$$

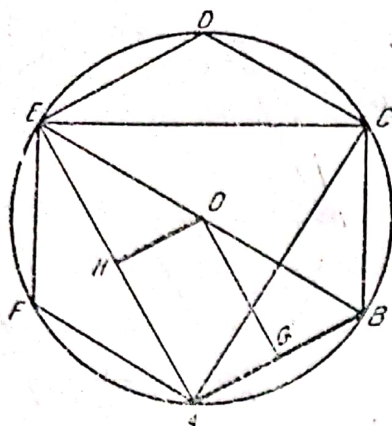


Fig. 120

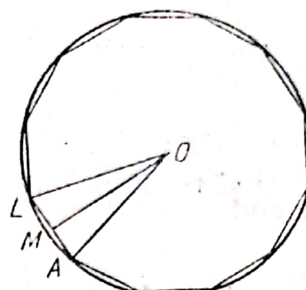


Fig. 121

Notînd cu G punctul de intersecție a diametrului AD cu BC, apotema triunghiului este OG. Patrulaterul $OBDC$ avînd toate laturile egale este romb deci

$$OG = \frac{R}{2} \text{ deci: } l_3 = R\sqrt{3}, a_3 = \frac{R}{2}.$$

Legătura dintre laturile și apotemele triunghiului echilateral și exagonului regulat pot fi urmărite pe figura 120:

$$OH = a_3 = \frac{l_6}{2}; OG = a_6 = \frac{l_3}{2}$$ (OH și OG linii mijlocii în triunghiul AEB).

Pentru calcularea elementelor unui poligon regulat oarecare putem folosi rapoartele trigonometrice cunoscute. De exemplu în poligonul regulat cu n laturi (fig. 121) dacă notăm cu l_n latura poligonului, cu a_n apotema, cu R raza cercului circumscris în ΔAOM, avem relațiile:

$$\frac{l_n}{2} = R \sin \frac{180°}{n}; \; a_n = R \cos \frac{180°}{n}.$$

De exemplu, să calculăm latura și apotema octogonului regulat cunoscînd raza cercului circumscris R.

$$l_8 = 2R \sin \frac{180°}{8} = 2R \sin 22°30' = 2R \cdot 0{,}383 = 0{,}766\ R,$$

$$a_8 = R \cos 22°30' = 0{,}924\ R.$$

Observare. Octogonul se poate construi împărțind întîi cercul în patru părți egale apoi ducînd din centrul cercului perpendiculare pe laturile pătratului. Ele vor împărți arcele respective în părți egale.

Probleme

1) *Două coarde AB și CD se taie într-un punct E din interiorul cercului formînd unghiuri egale cu diametrul care trece prin E. Să se arate că:*

a) *aceste coarde sînt egal depărtate de centru;*

b) *patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel.*

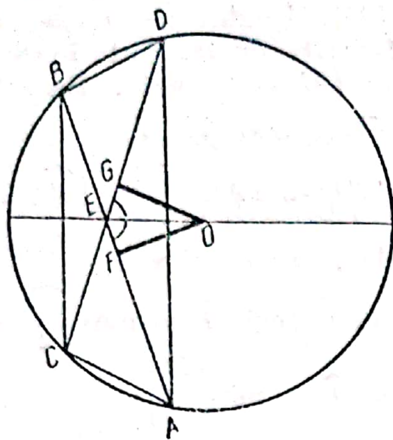


Fig. 122

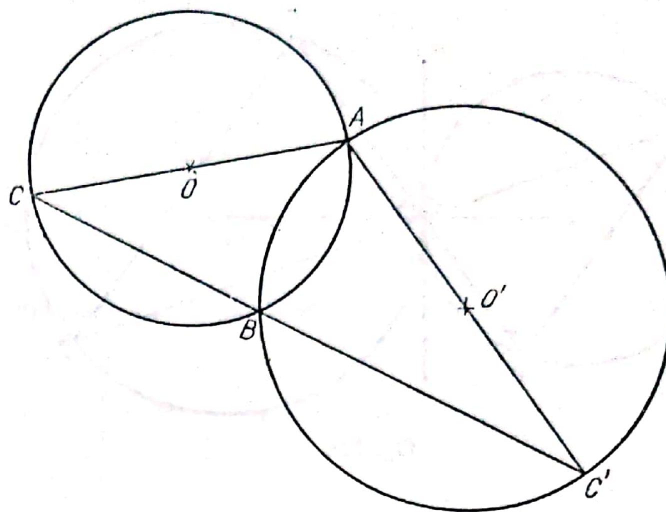


Fig. 123

a) Ducem $OF \perp AB$ și $OG \perp CD$ (fig. 122). Triunghiurile EOF și EOG sînt triunghiuri dreptunghice egale căci au ipotenuza comună și cîte un unghi ascuțit egal. Rezultă: $OF = OG$.

b) În patrulaterul $ABCD$ diagonalele AB și CD sînt egale fiind coarde egal depărtate de centru.

Arcele $\overset{\frown}{AC}$ și $\overset{\frown}{BD}$ sînt egale ca diferențe de arce egale.

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CB}$, $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{CB}$. Dar $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (corespund coardelor egale AB și CD) deci $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ și $\widehat{BCD} = \widehat{CDA}$ (măs $\overset{\frown}{AC}$ = măs $\overset{\frown}{BD}$). Rezultă că $BC \parallel AD$ (formează cu CD unghiuri alterne interne egale).

Patrulaterul $ABCD$ avînd două laturi paralele este trapez; trapezul $ABCD$ avînd diagonalele egale este trapez isoscel.

2) *Se dau cercurile O și O' secante în A și B. Se duc prin A diametrii cercurilor AC și AC'. Să se arate că:*

a) *punctele CBC' sînt coliniare.*

b) $CC' = 2 \cdot OO'$.

Pe figura 123 avem:

a) $\widehat{ABC} = 90°$, $\widehat{ABC'} = 90°$ (înscrise în semicercuri)

$\widehat{ABC} + \widehat{ABC'} = 180°$ deci

BC și BC' sînt în prelungire; C, B, C' coliniare

b) OO' este linie mijlocie în $\Delta ACC'$ deci

$$OO' = \frac{CC'}{2}.$$

3) *Să se demonstreze că dacă prin punctul de contact a două cercuri tangente exterioare ducem două secante și unim punctele lor de intersecție cu fiecare cerc, atunci se formează triunghiuri asemenea.*

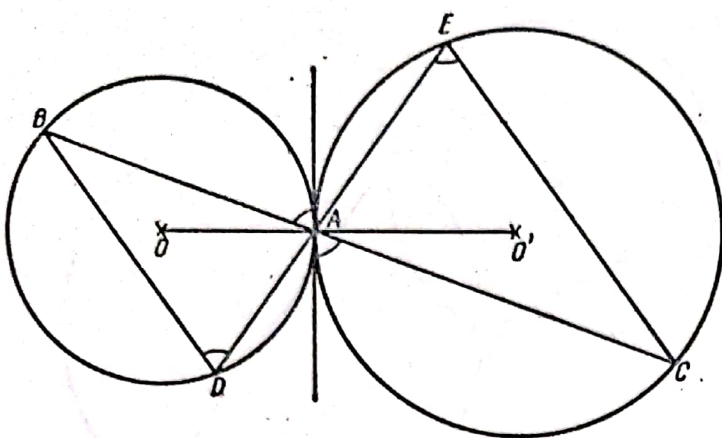


Fig. 124

Notînd cu A punctul de tangență ducem secantele BAC și DAE și tangenta comună în A (fig. 124). Unghiurile opuse la vîrf formate de tangenta în A și secanta BC sînt egale. Rezultă

măs $\widehat{AB}$ = măs $\widehat{AC}$ deci

$\Delta ABD \sim \Delta AEC \Big[1°)$ $\widehat{EAC} = \widehat{BAD}$, opuse la vîrf,

2°) $\hat{E} = \hat{D}$ (măs $\hat{E}$ = măs $\frac{\widehat{AC}}{2}$ = măs $\hat{D}$ = măs $\frac{\widehat{AB}}{2}\Big]$.

4) *Fie triunghiul dreptunghic ADB ($\hat{A} = 90°$) în care: $AD = 15$ cm și tg $B = \frac{3}{4}$. Pe cateta AB ca diametru, se construiește un cerc care întîlnește ipotenuza în I. Tangenta la cerc dusă în punctul B întîlnește dreapta AI în C; paralela prin I la această tangentă întîlnește pe AB și DC respectiv în M și N.*

a) *Să se afle lungimea diagonalelor trapezului $ABCD$.*

b) *Să se arate că $MI = IN$*

(Concurs matematică cl. a VII-a, etapa locală, București 1968)

Se dau:

a) $AD = 15$ cm, tg $B = \frac{3}{4}$. În triunghiul dreptunghic ABD (fig. 125) avem:

$$AD = AB \text{ tg } B, \quad 15 = \frac{3}{4} AB, \quad AB = 20 \text{ cm},$$

$$DB = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25. \quad \text{Diagonala } DB = 25 \text{ cm}.$$

Pentru a calcula diagonala AC considerăm triunghiurile dreptunghice ABC ($AB \perp BC$), ABD.

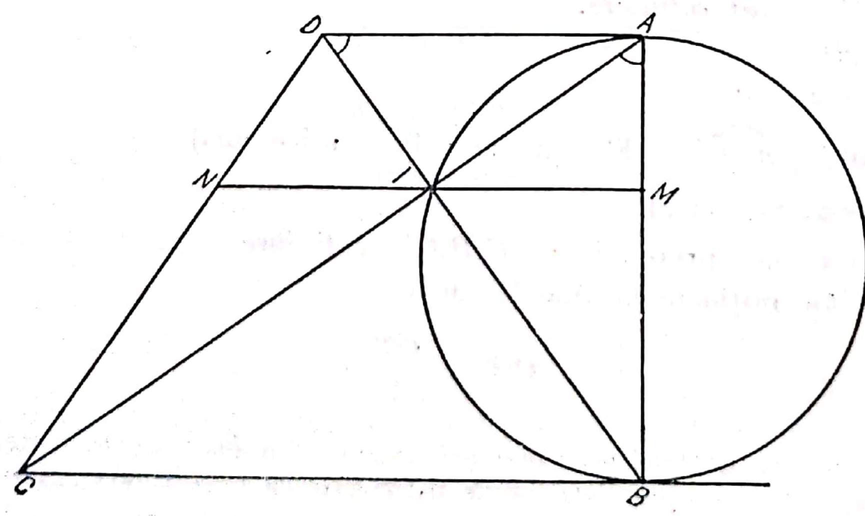


Fig. 125

$\triangle ABC \sim \triangle ABD$ ($\widehat{BAC} = \widehat{BDA}$ avînd același complement, $\widehat{CAD}$).

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{BD}, \quad \frac{20}{15} = \frac{AC}{25}, \quad AC = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} \text{ cm}.$$

b) Din triunghiul ACB, $IM \parallel CB$, $\frac{IM}{CB} = \frac{AM}{AB}$;

din triunghiul BDC, $IN \parallel BC$, $\frac{IN}{CB} = \frac{DN}{DC}$.

Dar dreptele $AD \parallel MN \parallel BC$ determină pe secantele AB, DC segmente proporționale:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC} \text{ deci și } \frac{IM}{CB} = \frac{IN}{CB}, \text{ de unde:}$$

$$IM = IN.$$

5) *În piramida triunghiulară regulată $VABC$ se dau: $AB = 3$ cm: $VA = 5$ cm. Să se calculeze:*

a) *unghiul pe care-l face o muchie laterală cu planul bazei;*

b) *unghiul pe care-l face o față laterală cu planul bazei.*

a) Unghiul dreptei cu planul este unghiul dintre dreaptă și proiecția ei pe plan. Vîrful V se proiectează în O (centrul cercului circumscris triunghiului echilateral ABC) deci unghiul muchiei VB cu planul este $\widehat{VBO}$ pe care-l notăm cu α.

În triunghiul dreptunghic VOB (fig. 126) avem $VB = 5$ cm și $OB = R = \frac{AB}{\sqrt{3}}$ ($l_3 = R\sqrt{3}$) deci $R = \sqrt{3}$.

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{1{,}732}{5} = 0{,}3464, \quad \alpha \approx 69°30'.$$

b) Unghiul diedru format de o față laterală (VBC) cu planul bazei are unghiul plan corespunzător diedrului, unghiul $ODV = \beta$.

Acest unghi este format de apotema piramidei și apotema bazei.

Din triunghiul dreptunghic VOB obținem

$$VO^2 = 25 - 3 = 22, \quad VO = \sqrt{22}.$$

Știind că $OD = \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, putem calcula tg β

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{VO}{OD} = \frac{2\sqrt{22}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{22}{3}} \approx 5.$$

$$\beta \approx 78°30°.$$

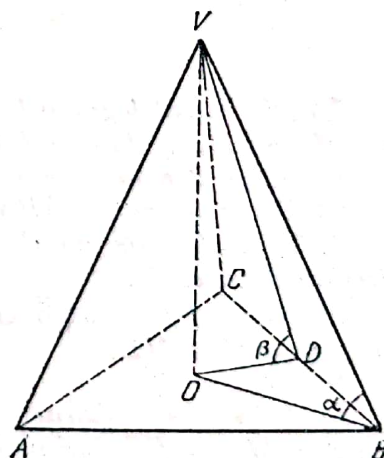


Fig. 126

6) *Cercurile O_1 de rază a și O_2 de rază $3a$ sînt tangente exterior în T. Se duce tangenta comună exterioară AB. Tangenta în T la cele două cercuri taie pe AB în E. Se cere:*

a) *Lungimea segmentului AB în funcție de a.*

Fig. 127

b) M fiind punctul de intersecție a dreptelor O_1O_2 și AB, să se calculeze MO_1.

c) Să se calculeze unghiul format de O_1O_2 și AB.

d) Să se arate că dreptele AT și BT sînt perpendiculare.

e) Să se arate că $ET = \frac{AB}{2}$.

a) Pe figura 127 ducem prin A dreapta $AB' \parallel O_1O_2$ (B' pe O_2B) $AB^2 = AB'^2 - BB'^2$; $AB^2 = 16a^2 - 4a^2$, $AB = 2a\sqrt{3}$.

b) $\triangle MO_1A \sim \triangle MO_2B$ (teorema fundamentală a asemănării) deci $\frac{MO_1}{MO_2} = \frac{a}{3a}$ sau $\frac{MO_1}{MO_1 + 4a} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$.

Formăm proporția derivată $\frac{MO_1}{4a} = \frac{1}{2}$; $MO_1 = 2a$.

c) În triunghiul $B'AB$ ipotenuza $AB' = 4a$, cateta $BB' = 2a$, $\sin \widehat{BAB'} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}$, deci $\widehat{BAB'} = 30°$.

d) În triunghiurile isoscele EAT și EBT ($EA = ET$ și $EB = ET$ tangente la cerc) $\widehat{EAT} = \widehat{ETA}$ și $\widehat{EBT} = \widehat{ETB}$. Dar suma unghiurilor celor două triunghiuri este formată din $\widehat{AET} + \widehat{TEB} = 180°$ și $2\,(\widehat{ATE} + \widehat{ETB})$.

Deci $2(\widehat{ATE} + \widehat{ETB}) = 180°$; $\widehat{ATB} = 90°$.

e) Din $AE = ET = EB$ rezultă $AE = EB = \frac{AB}{2}$ deci

$$ET = \frac{AB}{2}.$$

7) *Fie paralelogramul ABCD în care $AB = 2\,BC$ și unghiul $A = 60°$. Notăm cu M, mijlocul laturii CD. Dreapta AM intersectează diagonala DB în E. Se cere:*

a) Să se demonstreze că triunghiul BCM este echilateral.

b) Să se arate că ABMD este trapez înscris în cercul de diametru AB.

c) Triunghiurile ADB și AMB sînt triunghiuri dreptunghice egale.

d) Dacă $DB = 5\sqrt{3}$ cm să se afle perimetrul triunghiului DME.

Fig. 128

Pe figura 128

a) $AB = DC$ (laturi opuse în paralelogram rezultă $MC = BC$; triunghiul MBC este isoscel și $\hat{A} = \hat{C} = 60°$ deci triunghiul MBC este echilateral.

b) Patrulaterul $ABMD$ este trapez ($DM \parallel AB$) și $AD = MB$ ($MB = BC = AD$), deci este trapez isoscel.

Trapezul isoscel este inscriptibil într-un cerc. Coardele AD, DM, MB sînt egale și subîntind fiecare unghiuri de $60°$ $\left(\text{măs } \widehat{DAB} = \text{măs } \frac{\widehat{MB} + \widehat{MD}}{2} \text{ deci } 60° = \text{măs } \frac{2\widehat{MB}}{2}\right)$. Trapezul $ABMD$ este înscris într-un cerc cu diametrul AB.

c) Triunghiurile ADB și AMB sînt dreptunghice (înscrise într-un semicerc) și au ipotenuza comună și catetele egale ($AD = MB$) deci $\triangle ADB = \triangle AMB$.

d) În trapezul $MDAB$ s-au format triunghiurile isoscele asemenea $\triangle DEM \sim \triangle AEB$. Avem:

$$\frac{DE}{EB} = \frac{DM}{AB}, \text{ sau, formînd o proporție derivată: } \frac{DE}{DB} = \frac{DM}{3\,DM} = \frac{1}{3},$$

$$DE = \frac{5\sqrt{3}}{3}, \quad DE = EM = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

DM subîntinde un arc de $60°$ deci este latura hexagonului regulat înscris în cerc, iar DB subîntinde un arc de $120°$ deci DB este latura triunghiului echilateral înscris în cerc ($l_3 = R\sqrt{3}$). Rezultă: $R = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5$ și $l_6 = DM = 5$.

Notînd perimetrul triunghiului DEM cu $2p$ avem

$$2p = \frac{10\sqrt{3}}{3} + 5.$$

VII
Construcții grafice

În acest capitol vom prezenta mai multe construcții geometrice utilizînd numai rigla și compasul.

Pentru a construi pe o semidreaptă Ox un segment egal cu un segment AB dat, luăm în deschizătura compasului segmentul AB și-l purtăm pe semidreaptă punînd vîrful ascuțit al compasului în punctul O.

Construcția mediatoarei se bazează pe proprietatea caracteristică a punctelor mediatoarei de a fi egal depărtate de extremitățile segmentului. Dar două puncte determină o dreaptă. Vom construi deci două puncte ale mediatoarei.

Fie segmentul AB (fig. 129) cu o deschizătură de compas mai mare decît jumătatea segmentului AB ducem două arce de cerc cu centrul în A, de o parte și alta a segmentului. Mutăm vîrful ascuțit al compasului în B păstrînd aceeași deschidere a compasului și ducem cele două arce care intersectează celelalte două arce respectiv în D și E; dreapta DE este mediatoarea segmentului AB.

În adevăr, prin construcția făcută s-au format triunghiurile isoscele ADB și AEB. Înălțimile celor două triunghiuri fiind și mediane trec prin punctul M, mijlocul segmentului AB, și sînt perpendiculare în M pe BC.

Construcția perpendicularei pe o dreaptă.

a) Fie dreapta $x'x$ și un punct $A \in x'x$ (fig. 130). Pentru a construi perpendiculara în A pe $x'x$, luăm pe $x'x$ de o parte și de alta a punctului A două segmente egale $AB = AC$. Perpendiculara în A pe $x'x$ va fi mediatoarea segmentului BC pe care știm s-o construim. În acest caz, cunoscînd un punct al mediatoarei (A), putem construi un singur punct prin construcția cunoscută. În practică este bine să găsim două puncte și să verificăm dacă dreapta construită trece prin A; dacă nu trece prin A refacem construcția.

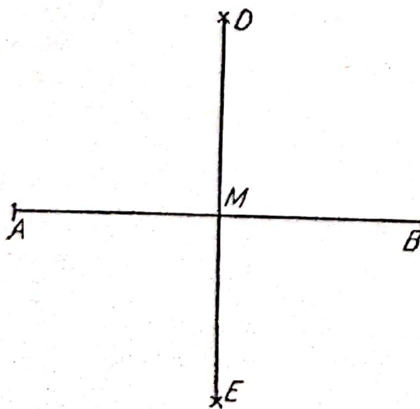


Fig. 129

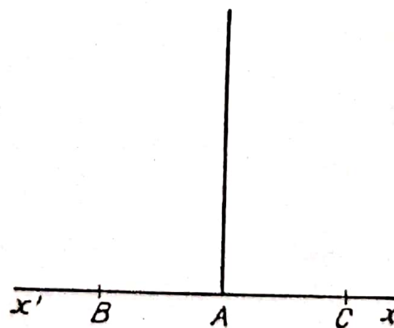


Fig. 130

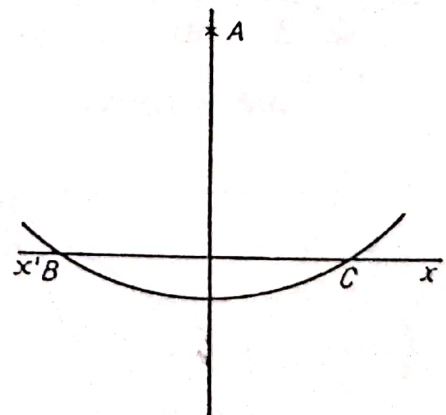


Fig. 131

b) Fie dreapta $x'x$ şi un punct A exterior dreptei (fig. 131). Pentru a găsi segmentul a cărei mediatoare trece prin A, tăiem dreapta cu un arc de cerc cu centrul în A şi raza arbitrară, dar mai mare decît distanţa de la punct la dreaptă. Arcul intersectează dreapta în punctele B şi C care determină segmentul căutat. Mediatoarea lui BC, care este coardă în cercul cu centrul A, trece prin A şi este perpendiculara căutată.

Construcţia unui unghi egal cu un unghi dat

Fiind dat un unghi xOy, pentru a construi un unghi egal cu unghiul xOy, procedăm astfel: luăm o semidreaptă $O'x'$ şi tăiem laturile unghiului xOy, cu un arc de cerc, cu centrul în O şi raza arbitrară în A şi B. Cu aceeaşi rază, ducem un arc de cerc cu centrul în O'. Acest arc taie semidreapta $O'x'$ într-un punct A'. Luăm din A' coarda $A'B' = AB$ (fig. 132) şi unim O' cu B'; unghiul $A'O'B'$ este egal cu $\widehat{xOy}$. În adevăr, în două cercuri egale la coarde egale ($AB = A'B'$) corespund unghiuri la centru egale ($\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$).

Construcţia bisectoarei unui unghi

Fiind dat un unghi xOy pentru a-i construi bisectoarea tăiem laturile unghiului cu un arc de cerc cu centrul în O şi raza arbitrară. Fie A şi B punctele de intersecţie a cercului cu laturile unghiului. Mediatoarea segmentului AB este bisectoarea unghiului xOy.

În adevăr, mediatoarea coardei AB împarte arcul AB şi deci şi unghiul la centru în două părţi egale (fig. 133).

Construcţia unei drepte paralele cu o dreaptă dată. Fie dreapta d şi A un punct exterior (fig. 134, a).

Din A ducem $AB \perp d$ şi tot din A ducem dreapta $a \perp AB$. Dreptele a şi d fiind perpendiculare pe aceeaşi dreaptă sînt paralele. Ţinînd seama de criteriile de para-

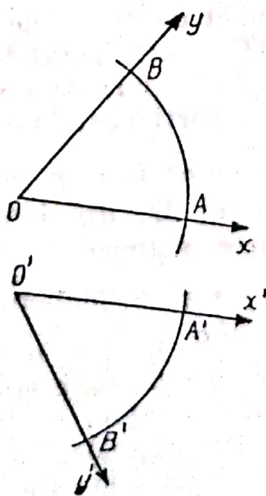


Fig. 132

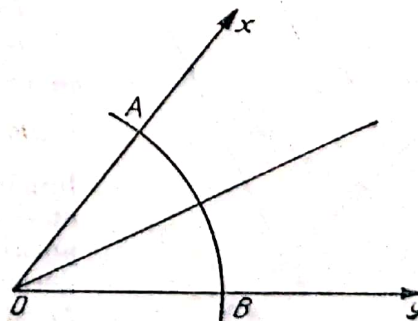


Fig. 133

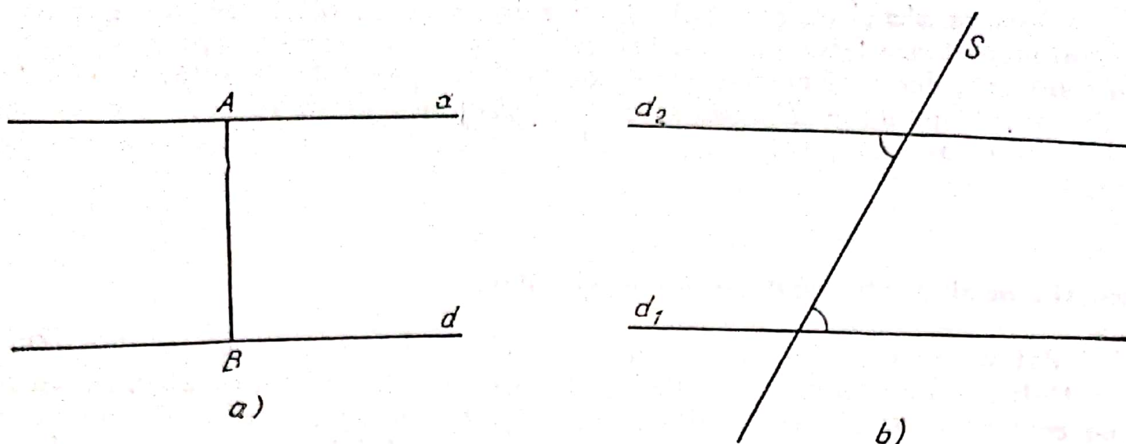


Fig. 134

lelism date de teorema relativă la dreptele care formează cu o secantă unghiuri alterne interne egale, putem duce o dreaptă δ care să formeze cu d_1 și d_2 unghiuri alterne interne egale (fig. 134, *b*). O altă metodă de a construi o paralelă la o dreaptă dată se bazează pe translație.

Prin translație toate punctele unei figuri descriu segmente de dreaptă paralele, egale și îndreptate în același sens.

Practic pentru a desena o dreaptă paralelă la o dreaptă dată printr-un punct exterior, așezăm echerul cu una din laturi pe dreapta dată apoi așezăm rigla pe o altă latură a echerului și facem echerul să alunece pe riglă pînă cînd latura echerului, care a fost așezată pe dreaptă, trece prin punctul exterior.

Pentru a desena o perpendiculară pe o dreaptă dintr-un punct exterior așezăm echerul cu o catetă pe dreapta dată și așezăm de-a lungul ei o riglă pe care facem să alunece echerul pînă cînd cealaltă catetă trece prin punctul exterior.

Împărțirea unui segment într-un număr de părți egale

Fiind dat un segment AB, pentru a-l împărți în n părți egale ducem printr-o extremitate a segmentului (de exemplu A) o semidreaptă pe care luăm, începînd din A, n segmente egale (fig. 135). Unim punctul B cu ultimul punct de diviziune notat cu L. Prin celelalte puncte de diviziune ducem paralele la BL. Aceste paralele determină pe segmentul AL n părți egale deci vor împărți și segmentul AB în n părți egale între ele.

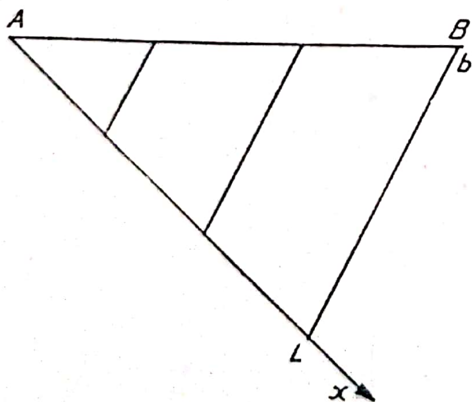


Fig. 135

Împărțirea unui segment într-un raport dat.

Pentru a găsi punctul M, din interiorul segmentului, care împarte segmentul AB într-un raport dat $\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$ (m și n numere naturale), împărțim segmentul AB în $m + n$ părți egale apoi prin punctul care marchează a m-a diviziune pornind din A, ducem o paralelă la dreapta care unește punctul B cu ultimul punct de diviziune. Acest punct există totdeauna și este unic pentru un raport dat.

Pentru a găsi punctul M', aflat pe prelungirea segmentului AB astfel ca $\frac{M'A}{M'B} = \frac{m}{n}$, judecăm astfel: dacă segmentul $M'A$ are m părţi egale atunci segmentul $M'B$ are n asemenea părţi deci segmentul AB are $(m-n)$ sau $(n-m)$ părţi egale după cum $m-n > 0$ sau $m-n < 0$.

Împărţim deci segmentul AB în $m-n$ sau $n-m$ părţi egale şi luăm punctul M' astfel încît $M'A$ să aibă m asemenea părţi.

De exemplu, să se găsească punctul care împarte segmentul AB în raportul $\frac{3}{7}$.

Fie segmentul dat AB. Pentru a găsi punctul M interior segmentului, împărţim segmentul AB în 10 părţi.

Împărţim segmentul AB în zece părţi egale (fig. 136). Luînd pe semidreapta Ax 10 segmente egale notăm cu C extremitatea celei de a treia diviziune şi cu D ultimul punct de diviziune. Prin C ducem $CM \parallel DB$; punctul M împarte segmentul AB în raportul $\frac{3}{7}$.

Pentru punctul M' exterior, împărţim pe AB în $7-3=4$ părţi egale. Fie AA' una din aceste părţi (fig. 137). Segmentul $M'A$ este egal cu $3AA'$. Deci pe prelungirea segmentului BA de la A spre stînga luăm segmentul $M'A = 3AA'$. Atunci $M'B = 3AA' + 4AA' = 7AA'$.

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{3}{7}.$$

Dacă raportul $\frac{m}{n}$ este supraunitar punctul M' se află pe prelungirea segmentului AB la dreapta punctului B.

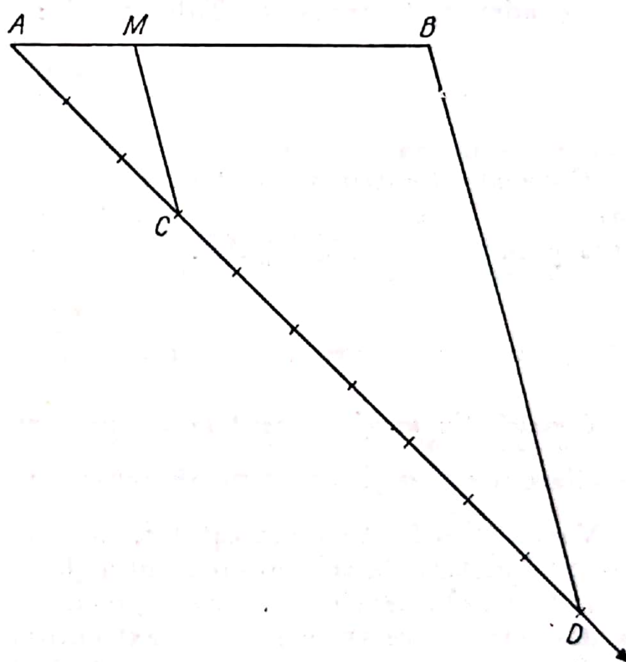


Fig. 136

Construcţia unui segment care să formeze o proporţie cu trei segmente date (Al patrulea proporţional cu trei segmente date).

Fie a, b, c cele trei segmente date. Se cere să aflăm un segment x astfel ca $\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$.

Pe baza teoremei lui Tales putem face următoarea construcţie:

1) Luăm două semidrepte Ox şi Oy. Pe Ox aşezăm cap la cap pornind din O (fig. 138) segmentele $a = OA$ şi $c = AC$, pe Oy aşezăm pornind din O segmentul $b = OB$. Unim A cu B şi prin C ducem $CD \parallel AB$. Segmentul x este segmentul BD.

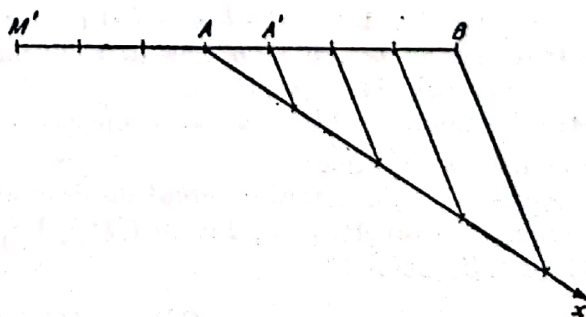


Fig. 137

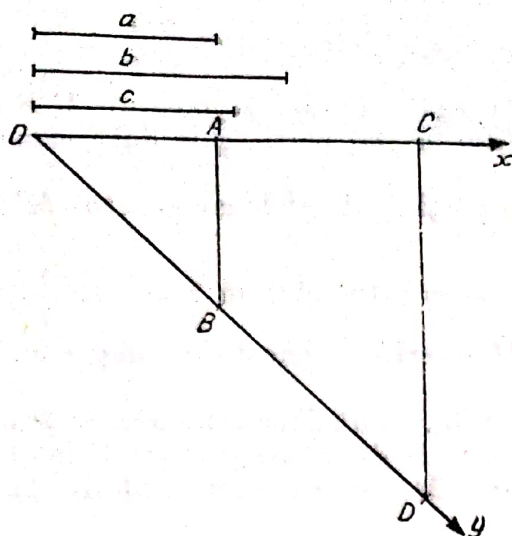


Fig. 138

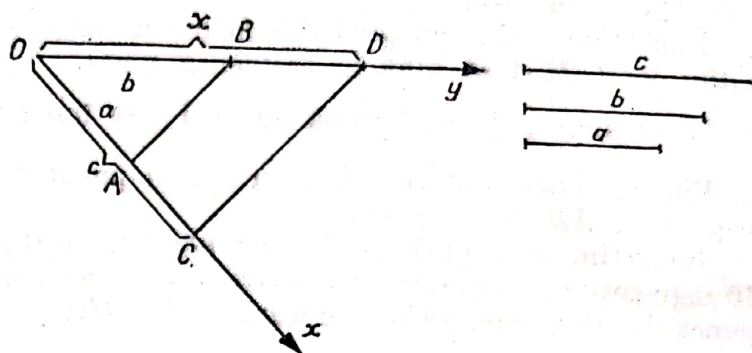


Fig. 139

În adevăr, teorema lui Tales ne dă:

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{x}.$$

Observare. Pentru a construi segmentul x putem folosi și altă formă a teoremei lui Tales. De exemplu dacă $c > a$ luăm pe Ox, $OC = c$ și $OA = a$; pe Oy, $OB = b$ apoi prin C ducem $CD \parallel AB$. Segmentul $OD = x$ (fig. 139)

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{x}; \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{x}.$$

Construcția unui segment medie proporțională între două segmente date. Fiind date două segmente a și b trebuie să construim un segment x astfel ca $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

Vom aplica fie teorema catetei, fie teorema înălțimii într-un triunghi dreptunghic. Relațiile metrice în triunghiul dreptunghic ne conduc, în cerc, la două teoreme analoge.

1° O coardă este medie proporțională între diametrul cercului și proiecția coardei pe diametrul care trece printr-o extremitate a coardei (teorema catetei).

2° Segmentul din perpendiculara dusă dintr-un punct al cercului pe un diametru, limitat la diametru, este medie proporțională între segmentele determinate pe diametru (teorema înălțimii).

Aplicînd 1°, dacă $a > b$ construim cercul de diametru $AB = a$ (fig. 140, *a*). Pe diametrul AB se ia $AC = b$, iar în C ducem $CD \perp AB$.

Segmentul AD (catetă în triunghiul dreptunghic ADB) este medie proporțională între ipotenuză ($AB = a$) și proiecția ei pe ipotenuză ($AC = b$) : $AD^2 = AC \cdot AB$, $x^2 = ab$, $x = \sqrt{ab}$.

Aplicînd 2°, construim cercul de diametrul $AB = a + b$ (fig. 140, *b*). În extremitatea C a segmentului $AC = a$, ducem $CD \perp AB$, CD este medie proporțională între segmentele AC și CB, deci

$$CD^2 = AC \cdot CB, \qquad x = \sqrt{ab}.$$

Fig. 140

Construcția triunghiului

Să se construiască un triunghi cînd se dau:
1) *o latură și unghiurile alăturate;*
2) *două laturi și unghiul cuprins între ele;*
3) *cele trei laturi.*

1) Dîndu-se un segment a și două unghiuri β, γ vom construi triunghiul ABC în care $BC = a$, $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$. Construim un segment $BC = a$ (fig. 141); în B și C construim de aceeași parte a lui BC respectiv unghiurile β și γ, ducînd semidreptele Bx și Cy care se întîlnesc într-un punct A cel de al treilea vîrf al triunghiului.

Punctul A există dacă $\beta + \gamma < 2$ dr.

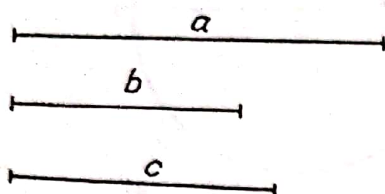
2) Dîndu-se două segmente b, c și un unghi α, vom construi triunghiul ABC în care $AC = b$, $AB = c$ și $\hat{A} = \alpha$.

Construim segmentul $AC = b$ (fig. 142). Cu vîrful în A construim $\widehat{CAy} = \alpha$. Pe Ay luăm punctul B astfel ca $AB = c$. Triunghiul ABC este triunghiul cerut. Putem găsi două puncte B și B' construind unghiurile egale CAy și CAy' de o parte și de alta a semidreptei AC. Triunghiurile obținute sînt egale.

3) Dîndu-se trei segmente a, b, c, vom construi triunghiul ABC în care $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Fig. 141

Fig. 142



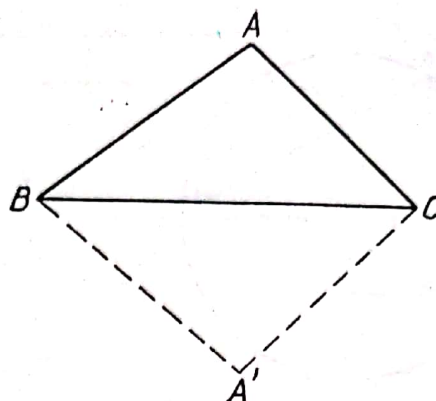


Fig. 143

Construim segmentul $BC = a$ (fig. 143) și din B și C, ca centre, ducem cercurile cu razele respectiv c și b. Cele două cercuri se întîlnesc în cel mult două puncte. Vom găsi deci cel mult două puncte A și A' ca al treilea vîrf al triunghiului cerut. Cele două puncte A și A' fiind pe coarda comună a celor două cercuri, sînt simetrice față de BC, deci cele două triunghiuri sînt egale. Dacă cele două cercuri au numai un punct comun, el se găsește pe dreapta centrelor celor două cercuri deci $b + c = a$; punctul A este situat pe BC deci nu putem construi triunghiul. Dacă cele două cercuri nu au nici un punct comun, atunci cu cele trei segmente nu se poate construi un triunghi.

Deci condiția necesară și suficientă ca să se poată construi un triunghi cu trei segmente date este ca fiecare din ele să fie mai mic decît suma celorlalte două.

În practică pentru a determina cel de al treilea vîrf al triunghiului nu ducem cercuri ci arce de cerc.

Construcția triunghiurilor dreptunghice

Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscînd:
1) *o catetă și unghiul ascuțit alăturat catetei;*
2) *catetele;*
3) *ipotenuza și un unghi ascuțit;*
4) *ipotenuza și o catetă.*

1) Fiind dată cateta $AB = b$ și unghiul $B = \beta$ (fig. 144), construim un segment egal cu segmentul b apoi din B ducem semidreapta Bx care să formeze cu BA un unghi egal cu β. Din A ducem perpendiculara care intersectează pe Bx în C. Triunghiul ABC are cateta $AB = b$ și $\hat{B} = \beta$.

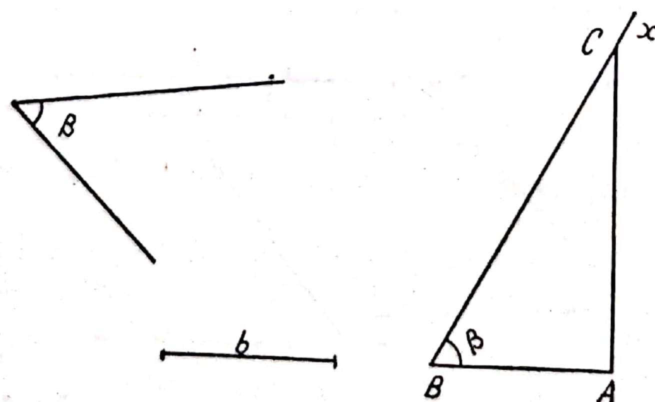


Fig. 144

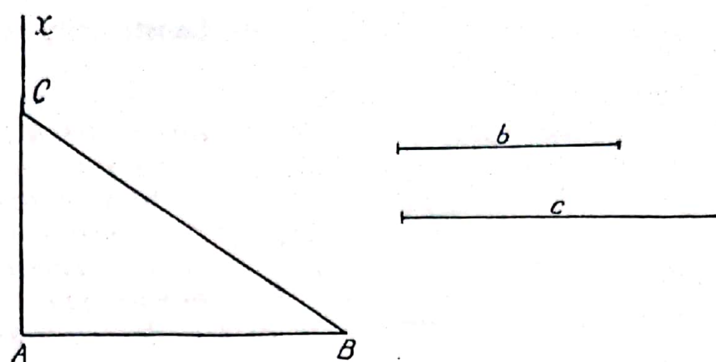


Fig. 145

2) Fiind date catetele $AB = c$, $AC = b$ (fig. 145), construim segmentul $AB = c$. În A ducem $Ax \perp AB$ și luăm pe Ax, $AC = b$. Triunghiul ABC are catetele egale cu b și c.

3) Fiind dată ipotenuza $BC = a$ și un unghi ascuțit $\hat{B} = \beta$ (fig. 146), construim ipotenuza BC și din B ducem o semidreaptă Bx care face cu BC un unghi $\widehat{CBx} = \beta$. Din C ducem $CA \perp Bx$. Triunghiul ABC are ipotenuza egală cu a și $\hat{B} = \beta$.

4) Fiind dată ipotenuza $BC = a$ și cateta $AB = c$ (fig. 147), construim cateta $AB = c$. Din punctul A ducem $Ax \perp AB$. Cu centrul în B și raza $r = a$ ducem un arc de cerc care taie pe Ax în C. Triunghiul ABC este dreptunghic ($A = 90°$), $BC = a$ și $AB = c$.

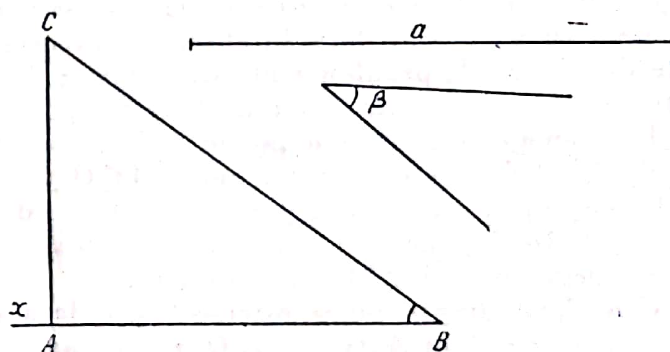


Fig. 146

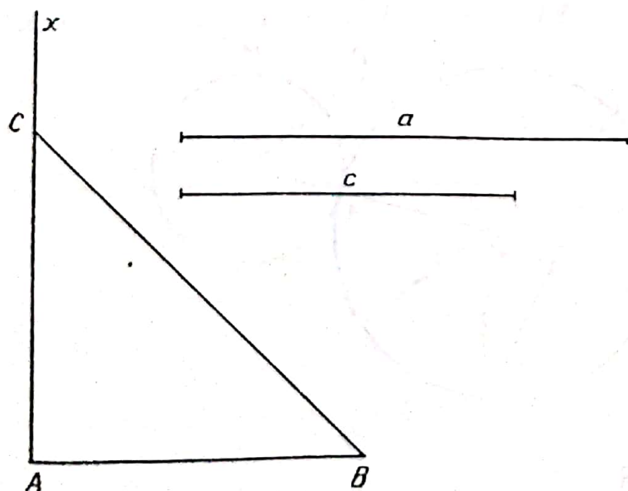


Fig. 147

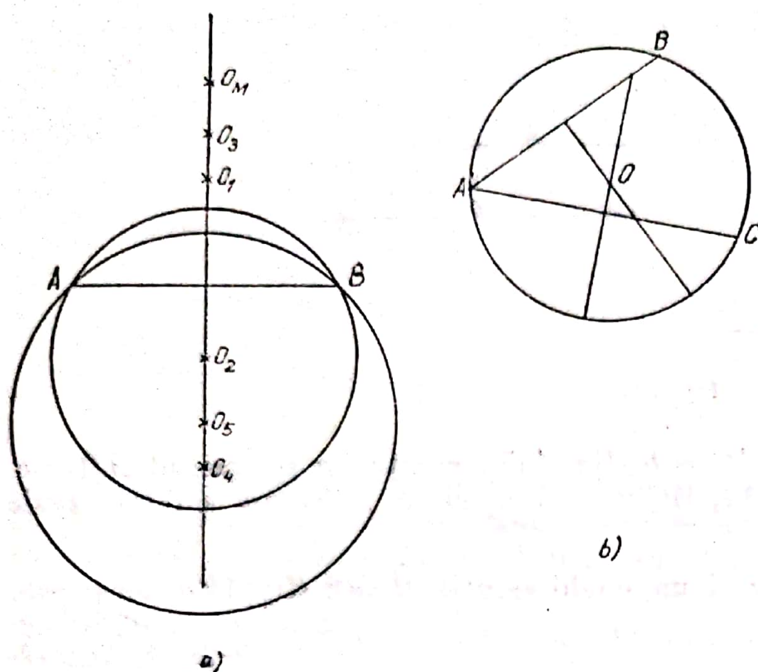


Fig. 148

Construcția cercului

Să se construiască un cerc care să treacă;

a) *prin două puncte date;*

b) *prin trei puncte date;*

c) *printr-un punct dat și să fie tangent la o dreaptă într-un punct dat;*

d) *printr-un punct dat și să fie tangent la un cerc dat într-un punct dat al cercului.*

a) Prin două puncte date putem construi o infinitate de cercuri cu centrul pe mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte (fig. 148, *a*).

b) Prin trei puncte date A, B, C, trece un singur cerc cu centrul în punctul O, intersecția mediatoarelor a două din segmentele determinate de cele trei puncte luate cîte două, și raza $OA = OB = OC$ (fig. 148, *b*).

c) Fiind dată o dreaptă a un punct A pe dreaptă și un punct M exterior dreptei (fig. 149, *a*) centrul cercului este la intersecția mediatoarei segmentului AM (coardă în cerc) cu perpendiculara în A pe a (direcția razei). Dacă M aparține dreptei a și este diferit de A, problema nu are soluție; dacă M se confundă cu A avem o infinitate de soluții (cercurile cu centrul pe perpendiculara în A pe a).

Problema este totdeauna posibilă și are soluție unică dacă M nu aparține dreptei a.

d) Fiind dat un cerc O, un punct $A \in O$ și un punct $M \notin O$, cercul C, pe care vrem să-l construim, va avea segmentul MA coardă iar tangenta în A va fi tangenta la cercul O. Deci punctul C, centrul cercului, va fi intersecția dreptei OA cu mediatoarea segmentului MA (fig. 149, *b*).

Cele două drepte nu se intersectează dacă sînt paralele: $DC \parallel OA$. Deci dacă M este pe tangenta în A la cercul O, problema nu are soluție. Dacă M este pe cercul O

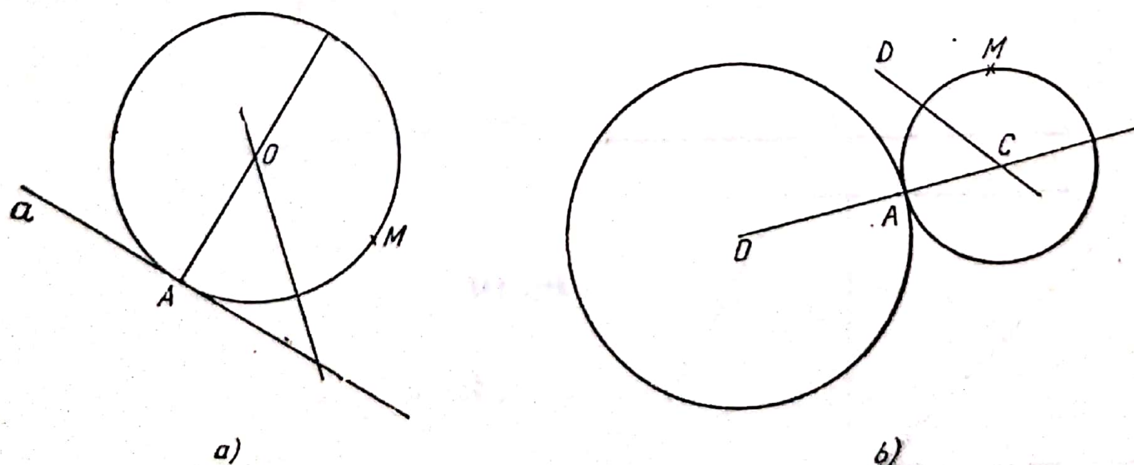


Fig. 149

şi este diferit de A problema nu are soluţie; dacă M se confundă cu A avem o infinitate de soluţii.

În concluzie, problema are soluţie unică dacă M nu aparţine cercului O şi tangentei în A la cercul O, are o infinitate de soluţii dacă M se confundă cu A, nu are soluţie dacă $M \in O$ (dar $M \neq A$) sau M aparţine tangentei la cerc în A.

Probleme de construcţii

Pentru a rezolva o problemă de construcţie vom căuta să reducem problema dată la una din problemele cunoscute pe baza relaţiilor dintre elementele figurii pe care trebuie s-o construim. În acest scop considerăm problema rezolvată şi cercetăm ce elemente ale figurii pot fi construite pe baza elementelor date.

Exemple

1) *Să se construiască un triunghi cunoscînd o latură, un unghi alăturat acestei laturi şi suma celorlalte două laturi.*

Fiind date două segmente a şi s ($a < s$) şi unghiul β, vom considera problema rezolvată. Fie triunghiul ABC în care $a = BC$, $\widehat{B} = \beta$ şi $AB + AC = s$ (fig. 150).

Putem construi segmentul $BC = a$ şi semidreapta Bx care face cu BC un unghi egal cu β. Trebuie să mai determinăm vîrful A. Pe schiţă prelungim pe BA cu un segment $AA' = AC$ şi formăm triunghiul isoscel $A'AC$. Mediatoarea segmentului CA' (care poate fi construită) intersectează semidreapta Bx în punctul A.

Deci, pe semidreapta Bx luăm segmentul $BA' = s$, ducem mediatoarea segmentului CA' care intersectează pe Bx în A.

De la început am pus condiţia $a < s$ deci

$$BC < BA + AC.$$

Cu segmentele a, s şi unghiul $\beta < 2$ dr se poate construi un triunghi şi numai unul (triunghiul simetric faţă de BC este egal cu el). Segmentul $A'C$ are totdeauna o mediatoare şi numai una. Mediatoarea segmentului CA' şi semidreapta Bx au un singur punct comun căci sînt drepte diferite şi nu pot fi paralele. Problema are totdeauna soluţii dacă $a < s$ şi $\beta < 2$ dr.

2) *Să se construiască un trapez cînd se cunosc laturile trapezului.*

Fiind date patru segmente a, b, c, d, vom considera problema rezolvată. Fie trapezul $ABCD$ unde $AB = a$, $BC = b$, $DC = c$, $DA = d$ ($a > c$) şi $AB \parallel DC$ (fig. 151).

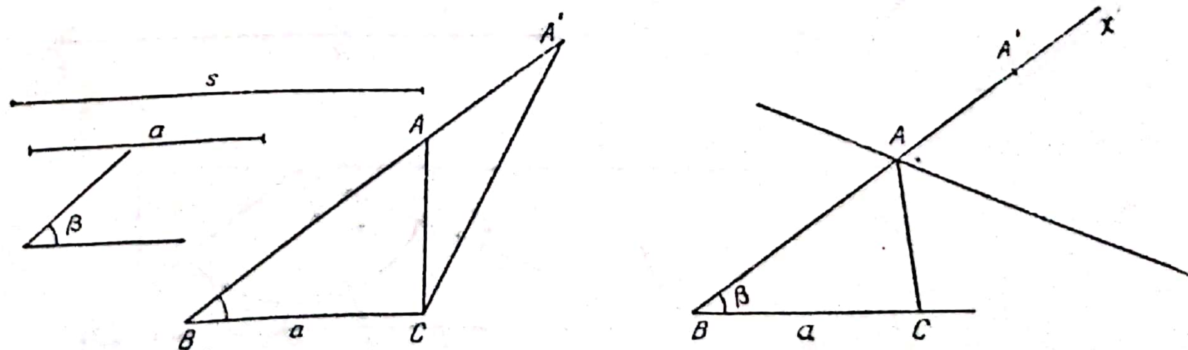


Fig. 150

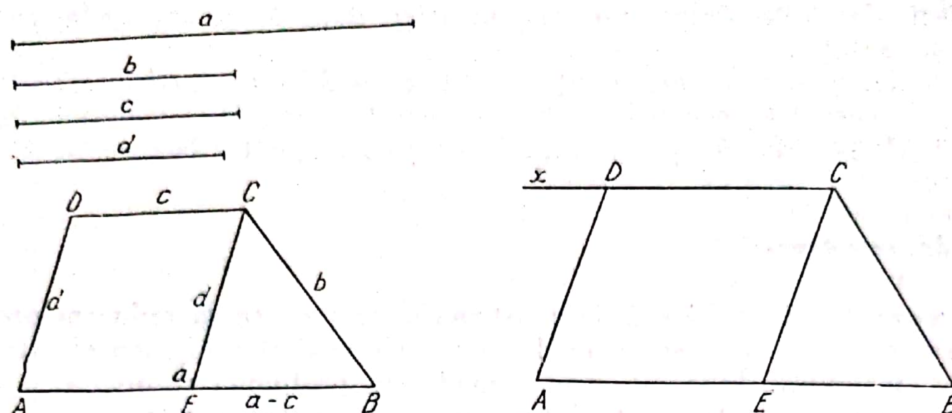


Fig. 151

Pe schiță se vede că ducînd $CE \parallel AD$ se formează triunghiul EBC în care $CB = b$, $CE = AD = d$, $EB = AB - AE = a - c$.

Triunghiul poate fi construit dacă $a - c < d + b$ şi $a - c > |d - b|$.

Construim triunghiul EBC cu laturile $CE = d$, $CB = b$, $EB = a - c$.

Pe semidreapta BE luăm pornind din B segmentul $BA = a$. Prin C ducem $Cx \parallel AB$. Pe semidreapta Cx luăm $CD = c$. Patrulaterul $ABCD$ este trapezul cerut.

3) *Să se construiască un paralelogram cunoscînd cele două diagonale şi unghiul format de ele.*

Considerăm problema rezolvată. Fie $ABCD$ paralelogramul care are diagonalele date $AC = d_1$, $DB = d_2$ şi $\widehat{AOB} = \alpha$ (fig. 152). Pe schiță se vede că ducînd $CE \parallel DB$, se formează triunghiul ACE în care sînt date: $AC = d_1$, $CE = d_2$ şi $\widehat{ACE} = \alpha$. Triunghiul ACE poate fi construit totdeauna dacă $\alpha < 2$ dr. Prin C ducem $Cx \parallel AB$. Segmentul AC fiind diagonală în paralelogram, centrul paralelogramului este în O, mijlocul segmentului AC. Din O ca centru, cu raza $OB = OD = \frac{d_2}{2}$, ducem arce de cerc care taie AE şi xC respectiv în B şi D; $ABCD$ este paralelogramul cerut. Problema este totdeauna posibilă şi are o singură soluție.

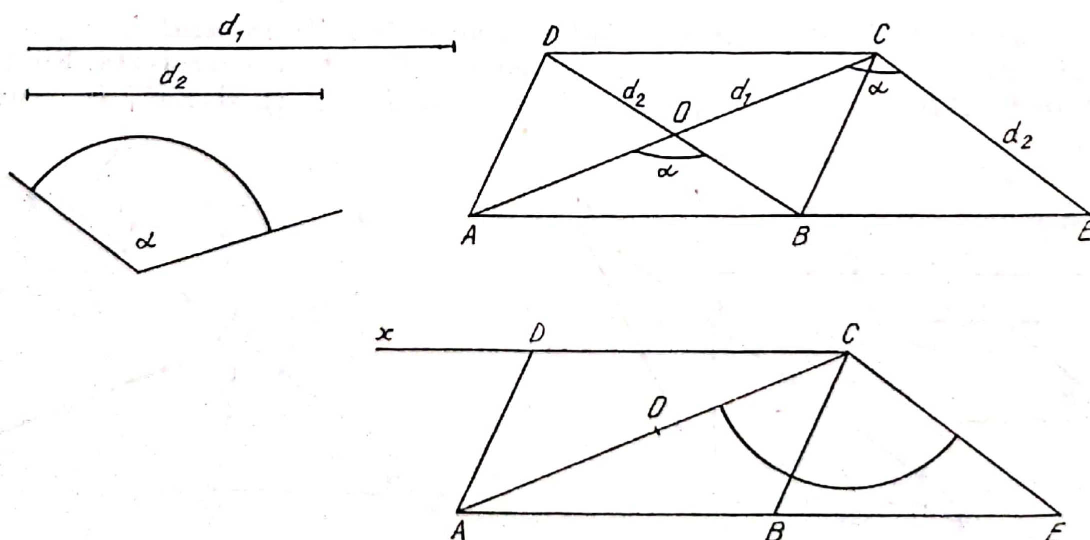


Fig. 152

VIII
Arii și volume

Aria unei porțiuni de suprafață plană este un număr pozitiv care indică de cîte ori se cuprinde unitatea de măsură aleasă în suprafața considerată.

Ne vom referi în cele ce urmează la aria unui poligon.

— *Două poligoane egale au ariile egale.*

— *Două poligoane avînd cel puțin o latură sau o porțiune de latură comună, fără puncte interioare comune, formează un poligon a cărui arie este egală cu suma ariilor celor două poligoane.*

— *Pătratul cu latura* 1 *are aria* 1.

Se utilizează ca unitate de măsură pentru suprafețe metrul pătrat (m^2) adică pătratul cu latura de 1 m.

Poligoanele cu ariile egale le numim *echivalente.*

Aria dreptunghiului. Aria dreptunghiului cu dimensiunile a și b (fig. 153) se calculează cu formula

$$\boxed{S = b \cdot a}.$$

Aria pătratului. Pătratul fiind dreptunghiul cu laturile egale, vom avea

$$\boxed{S = l^2}$$ (l este latura pătratului).

Aria paralelogramului. Fie paralelogramul $ABCD$ (fig. 154). Ducem înălțimile AA' și BB'. S-au format triunghiurile egale ADA' și BCB' ($AD = BC$ și $AA' = BB'$). Paralelogramul este echivalent cu dreptunghiul $AA'B'B$ care are aceeași bază și aceeași înălțime. În adevăr, $S_{ABCD} = S_{ABB'D} + S_{BCB'}$, $S_{ABB'A'} = S_{ABB'D} + S_{ADA'}$. Dar $S_{ADA'} = S_{BCB'}$ deci: $S_{ABCD} = S_{ABB'A'}$

$$\boxed{S = bi}.$$

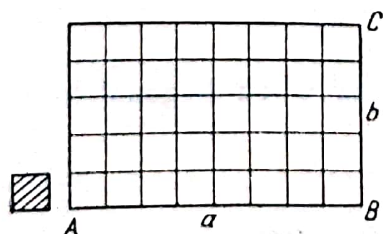


Fig. 153

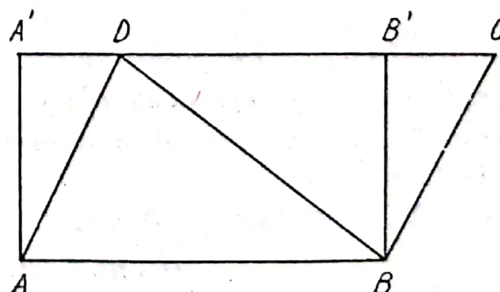


Fig. 154

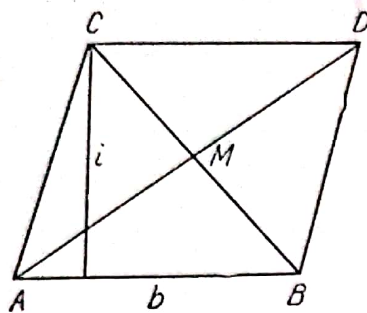


Fig. 155

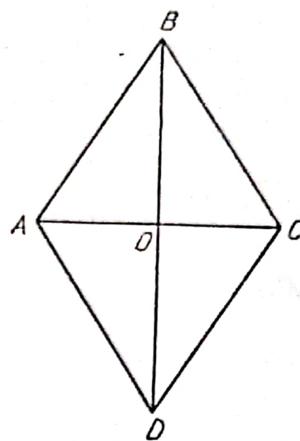


Fig. 156

Aria triunghiului. Fie triunghiul ABC și notăm cu D simetricul vîrfului A în raport cu mijlocul segmentului BC (fig. 155). Patrulaterul $ABCD$, care are un centru de simetrie, intersecția diagonalelor, este paralelogram și $\triangle ABC = \triangle BCD$. Aria triunghiului ABC este deci jumătate din aria paralelogramului care are ca bază, o latură a triunghiului și ca înălțime, înălțimea triunghiului.

Așadar, aria triunghiului este

$$\boxed{S = \frac{bi}{2}}.$$

Observare. Dacă triunghiul este dreptunghic aria lui este semiprodusul dintre ipotenuză și înălțimea relativă la ipotenuză sau semiprodusul catetelor. Regăsim relația cunoscută de la relațiile metrice: produsul dintre ipotenuză și înălțimea relativă la ipotenuză este egal cu produsul catetelor.

Rombul fiind un paralelogram, aria este

$$\boxed{S = \frac{bi}{2}}.$$

Ținînd seama că diagonalele rombului sînt perpendiculare, aria este egală cu dublul ariei unuia din triunghiurile isoscele formate de o diagonală a rombului (fig. 156).

Aria rombului este deci și semiprodusul diagonalelor:

$$\boxed{S = \frac{d_1 d_2}{2}}$$

unde d_1 și d_2 sînt cele două diagonale.

Aceeași formulă o vom folosi la orice patrulater convex cu diagonalele perpendiculare (fig. 157).

În adevăr, $S = S_{ABC} + S_{ACD}$,

$$S = \frac{AC \cdot BO}{2} + \frac{AC \cdot OD}{2} = \frac{AC}{2}\,(BO + OD).$$

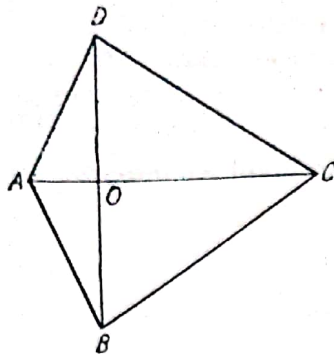


Fig. 157

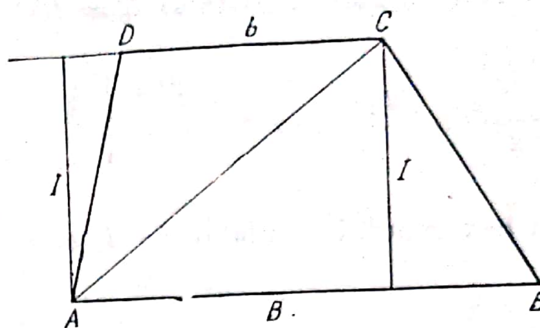


Fig. 158

$S = \dfrac{AC \cdot BD}{5}$ sau notînd diagonalele AC și BD cu d_1 respectiv d_2 avem $S = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Aria trapezului. Notînd cu b, B bazele trapezului iar cu I înălțimea, aria este dată de formula

$$\boxed{S = I \cdot \frac{b + B}{2}.}$$

În adevăr, ducînd diagonala AC (fig. 158), $S = S_{ABC} + S_{ADC}$.

$$S = \frac{AB \cdot I}{2} + \frac{DC \cdot I}{2}; \quad S = \frac{I}{2}\,(AB + DC),$$

$$S = I \cdot \frac{b + B}{2}.$$

Aria unui poligon regulat. Notînd cu P perimetrul și cu a apotema, aria este dată de formula

$$\boxed{S = \frac{P \cdot a}{2}.}$$

Se știe că un poligon regulat poate fi înscris într-un cerc. Fie O centrul acestui cerc, raza R, iar l, latura poligonului.

Perpendiculara din O pe o latură a poligonului este raza cercului înscris în poligon sau apotema poligonului. Unind O cu vîrfurile poligonului regulat cu n laturi, obținem n triunghiuri egale, cu baza o latură l a poligonului și înălțimea, apotema a a poligonului (fig. 159).

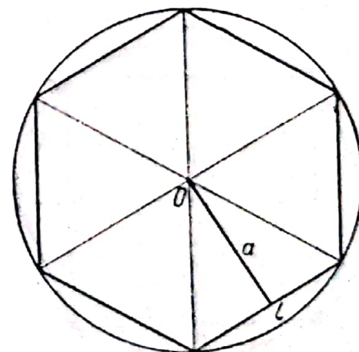


Fig. 159

$S = n \cdot \dfrac{l \cdot a}{2}$. Dar $nl = P$ deci

$$S = \frac{P \cdot a}{2}.$$

În cazul triunghiului echilateral $l_3 = R\sqrt{3}$, $a_3 = \frac{R}{2}$.

$$S = \frac{3R\sqrt{3}\cdot\frac{R}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \text{ sau } S = \frac{3\sqrt{3}\left(\frac{l_3}{\sqrt{3}}\right)^2}{4} = \frac{\sqrt{3}l_3^2}{4}.$$

În cazul hexagonului regulat $l_6 = R$, $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$$S = \frac{6R\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2} \text{ sau } S = \frac{3\sqrt{3}l_6^2}{2}.$$

Observare. Aria hexagonului regulat este egală cu de două ori aria triunghiului echilateral înscris în același cerc.

Aria unui poligon oarecare se află împărțind poligonul în poligoane a căror arie știm s-o calculăm (triunghiuri, paralelograme, trapeze etc.).

Lungimea și aria cercului

Poligoanele regulate cu același număr de laturi sînt asemenea; raportul perimetrelor lor este egal cu raportul razelor cercurilor circumscrise și egal cu raportul de asemănare:

$$\frac{p}{p'} = \frac{l}{l'} = \frac{R}{R'} \text{ sau } \frac{p}{R} = \frac{p'}{R'}.$$

Dacă avem un poligon regulat cu n laturi înscris în cerc, putem obține un poligon regulat cu $2n$ laturi prin ducerea razelor perpendiculare pe fiecare latură a poligonului (fig. 160). Repetînd operația obținem un poligon cu 2^2n, 2^3n, 2^4n laturi ș.a.m.d. Poligoanele obținute, cu laturile din ce în ce mai mici, se apropie din ce în ce de cercul circumscris. Dacă numărul laturilor poligonului este foarte mare, perimetrul lui aproximează lungimea cercului. Dacă avem două cercuri cum ele sînt totdeauna asemenea din:

$$\frac{p}{R} = \frac{p'}{R'} \text{ putem scrie: } \frac{L}{2R} = \frac{L'}{2R'}$$

unde am notat cu L și L' lungimile celor două cercuri.

Raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul lui este constant. Acest număr constant, care nu este un număr rațional, îl notăm cu π și luăm ca valoare aproximativă $\pi = 3{,}14$ sau $\pi = 3{,}1416$. π este un număr zecimal neperiodic, cu un număr infinit de zecimale. Pentru calculele noastre este suficient să luăm $\pi = 3{,}14$. Valoarea lui π cu mai multe zecimale este

$$\pi = 3{,}141592653\ldots$$

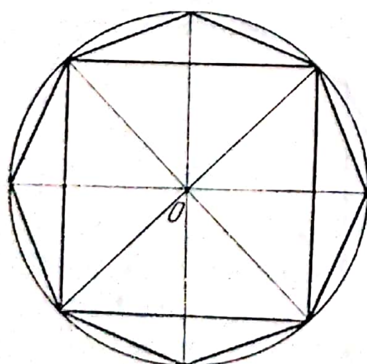


Fig. 160

Lungimea cercului este $L = 2\pi R$.

Pentru a calcula lungimea unui arc de cerc corespunzător unghiului la centru de $n°$ (fig. 161) judecăm astfel:

Lungimea unui semicerc este πR deci

la $180°$ corespunde lungimea πR,

la $n°$ corespunde lungimea $\frac{\pi R}{180°} \cdot n°$.

$$L_{arc} = \frac{\pi R}{180} \cdot n$$

Aria cercului. Aproximăm aria cercului cu aria unui poligon regulat cu un număr foarte mare de laturi, înscris în cerc prin formula $S = \frac{p \cdot a}{2}$. Perimetrul devine lungimea cercului iar apotema raza cercului.

$$A_{cerc} = \frac{2\pi R^2}{2}; \qquad A_{cerc} = \pi R^2.$$

Aria sectorului de cerc și a segmentului de cerc.

Aria sectorului de cerc de $n°$ (fig. 161) se calculează, astfel: aria unui sector care corespunde la $360°$ este aria cercului, deci

$$360° \ldots\ldots \pi R^2$$

$$n° \ldots\ldots \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$$

$$A_{sect.} = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

Aria segmentului de cerc se calculează scăzînd din aria sectorului corespunzător aria triunghiului format de cele două raze care unesc centrul cu extremitățile segmentului și coarda segmentului de cerc (fig. 162).

$$S_{seg.} = S_{sect.} - S_{AOB}.$$

Aria coroanei circulare (porțiunea dintre două cercuri concentrice de raze R_2 și R_1) este $S_c = \pi \ (R_2^2 - R_1^2)$.

Aplicație

Fiind dat un cerc de rază R și triunghiul echilateral ABC înscris în el, să se calculeze aria segmentului de cerc mai mic determinat de o latură a triunghiului.

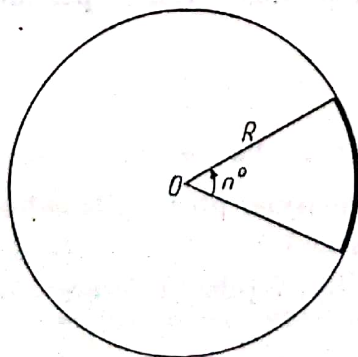


Fig. 161

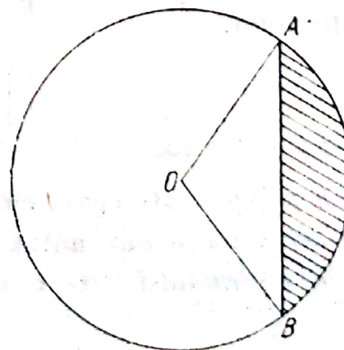


Fig. 162

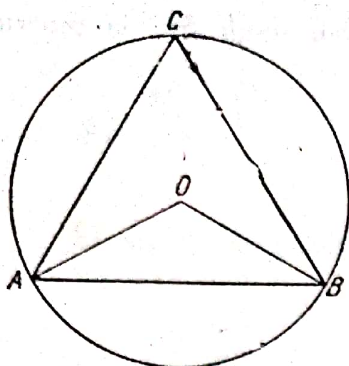
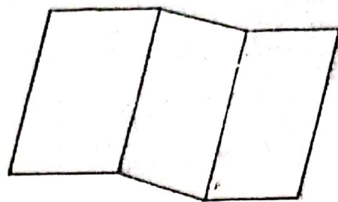


Fig. 163


a)

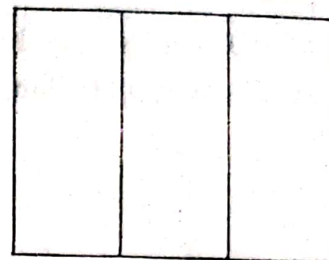

b)

Fig. 164

Latura triunghiului echilateral subîntinde un arc de 120° (fig. 163)

$$A_{seg.\ AB} = A_{sect.\ OAB} - A_{OAB}$$

$$A_{seg.\ AB} = \frac{\pi R^2 \cdot 120°}{360°} - \frac{l_3 \cdot a_3}{2} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4}.$$

$$A_{seg.\ AB} = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}) \approx \frac{R^2}{12}(12{,}56 - 5{,}19).$$

$$A_{seg.} \approx \frac{7{,}37}{12} R^2 \approx 0{,}61R^2.$$

În acest caz se putea calcula mai simplu aria segmentului observînd că, dacă scădem din aria cercului aria triunghiului echilateral, obținem de 3 ori aria unui segment de cerc.

$$A_{seg.} = \frac{1}{3}\left(\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\right) = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Aria laterală a prismei este egală cu suma ariilor fețelor laterale $S_l = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

Dacă desfășurăm suprafața laterală a unei prisme oblice cu baza un poligon regulat pe un plan, obținem o figură formată din n paralelograme (fig. 164, *a*) care au laturile alipite egale. Dacă prisma este dreaptă, fețele laterale sînt dreptunghiuri care au aceeași înălțime deci, prin desfășurare, vom obține un dreptunghi cu baza egală cu perimetrul bazei prismei și cu înălțimea egală cu înălțimea prismei (fig. 164, *b*).

Aria laterală a unei prisme drepte este egală cu produsul dintre perimetrul bazei și înălțimea prismei.

$$\boxed{S_l = P \cdot I}$$

Aria totală a prismei este egală cu aria laterală a prismei plus ariile celor două baze $S_t = S_l + 2B$ (cu B am notat aria unei baze).

Aria laterală a piramidei este egală cu suma ariilor fețelor laterale care sînt triunghiuri

$$S_b = S_1 + S_2 + \ldots + S_n.$$

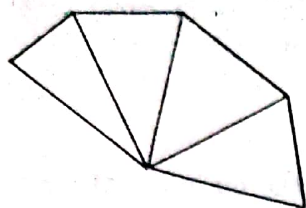


Fig. 165

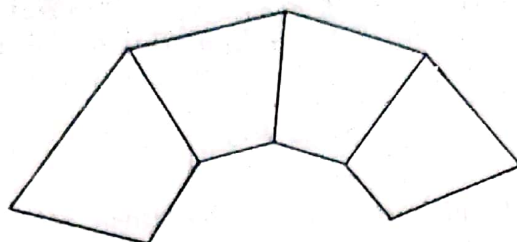


Fig. 166

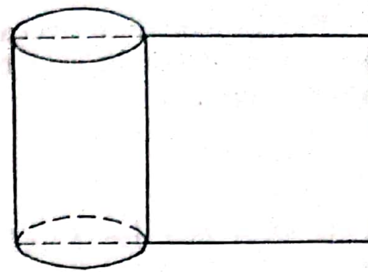


Fig. 167

Prin desfășurarea suprafeței laterale a unei piramide cu n fețe se obține un poligon format din n triunghiuri (fig. 165). Dacă piramida este regulată (are ca bază un poligon regulat și înălțimea cade în centrul poligonului de bază), atunci vom avea n triunghiuri egale. Deci:

$$S_b = n\ S_{VAB} = n \cdot \frac{AB \cdot VM}{2}$$

unde AB este latura poligonului de bază iar VM înălțimea unei fețe laterale deci apotema piramidei; dar $n\ AB = P$ deci aria laterală a piramidei regulate este:

$$\boxed{S_l = \frac{P \cdot A}{2}}$$

unde am notat apotema piramidei cu A și perimetrul bazei cu P.

Aria totală este egală cu aria laterală plus aria bazei.

$$S_t = S_l + B.$$

Aria laterală a trunchiului de piramidă este egală cu suma ariilor fețelor laterale:

$$S_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$$

unde fețele laterale sînt trapeze.

Prin desfășurarea suprafeței laterale se obține un poligon format din n trapeze (fig. 166). Dacă trunchiul de piramidă este regulat, atunci trapezele sînt isoscele, egale și aria laterală este egală de n ori aria unui trapez:

$$S_l = n \cdot \frac{AB + A'B'}{2} \cdot \text{h}.$$

Notînd cu P,p perimetrele bazelor și cu A apotema trunchiului de piramidă, aria laterală a trunchiului de piramidă regulată este:

$$\boxed{S_l = \frac{P + p}{2} \cdot A}.$$

Aria totală se obține adunînd la aria laterală ariile celor două baze B și b:

$$S_t = S_l + B + b.$$

Aria laterală a cilindrului circular drept. Prin desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept se obține un dreptunghi care are înălțimea egală cu generatoarea cilindrului și baza egală cu lungimea cercului de bază (fig. 167). Deci

$$\boxed{S_l = 2\pi RG.}$$

Putem ajunge la aceeaşi formulă dacă considerăm cilindrul ca o prismă dreaptă cu aceeaşi înălţime în care numărul laturilor poligonului de bază (înscris în cerc) creşte foarte mult.

$$\boxed{S_l = P \cdot I}$$

unde $P = 2\pi R$ iar $I = G$ (la cilindrul drept înălţimea este egală cu generatoarea), deci

$$\boxed{S_l = 2\pi RG.}$$

$$S_t = S_l + 2B,\ S_t = 2\pi RG + 2\pi R^2 = 2\pi R(G + R).$$

Aria laterală a conului circular drept. Considerăm conul ca o piramidă cu vîrful în vîrful conului şi cu baza un poligon regulat, înscris în cercul de bază, cu un număr foarte mare de laturi.

Aria laterală a piramidei regulate: $S_l = \frac{P \cdot A}{2}$.

Aria laterală a conului: $S_l = \frac{2\pi RG}{2}$;

$$\boxed{S_l = \pi RG.}$$

(apotema a devenit generatoare).

Aria totală: $S_t = \pi RG + \pi R^2 = \pi R(G + R)$.

Prin desfăşurarea suprafeţei laterale a unui con se obţine un sector de cerc care are lungimea arcului egală cu lungimea cercului de bază iar ca rază r, generatoarea G a conului (fig. 168). Aria laterală a conului este egală cu aria sectorului:

$$\pi RG = \frac{\pi G^2 n}{360}$$

de unde:

$$n^\circ = \frac{R \cdot 360^\circ}{G}.$$

Aplicaţii

1) *Să se determine raza R şi generatoarea G a unui con format dintr-un sector circular cu raza $r = 3$ cm şi unghiul la centru $\alpha = 120^\circ$.*

$G = 3$; $R = 3 \cdot \frac{120}{360}$, $\quad R = 1$ cm.

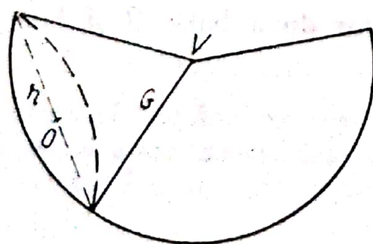


Fig. 168

2) *Să se afle unghiul la centru α al sectorului obţinut prin desfăşurarea unui con circular drept cu lungimea cercului de bază 6π şi înălţimea $I = 4$ cm.*

Lungimea cercului de bază este egală cu lungimea arcului sectorului, generatoarea conului este egală cu raza sectorului.

$2\pi r = 6\pi$, $r = 3$ cm, $\quad R = G = \sqrt{9 + 16} = 5$ cm.

$$\frac{\pi Rn}{180} = 2\pi r.$$

$$n^\circ = 216^\circ.$$

Aria laterală a trunchiului de con. Trunchiul de con poate fi privit ca un trunchi de piramidă cînd numărul laturilor poligonului de bază crește foarte mult.

Formula ariei laterale a trunchiului de piramidă regulată: $S_l = \frac{P+p}{2} A$ devine:

$$S_l = \frac{2\pi(R+r)}{2} G,$$

$$\boxed{S_l = \pi G (R + r).}$$

Prin desfășurarea unui trunchi de con se obține o porțiune dintr-o coroană circulară.

Aria totală a trunchiului de con:

$$S_t = \pi G (R + r) + \pi(R^2 + r^2).$$

Aria sferei este egală cu de patru ori aria unui cerc mare al sferei

$$\boxed{S_{\text{sferă}} = 4\pi R^2.}$$

Aria unei zone sau a unei calote sferice. Porțiunea din suprafața sferei cuprinsă între cercurile de secțiune obținute prin secționarea sferei cu două plane paralele se numește *zonă sferică*; dacă unul din plane este tangent la sferă, zona se numește *calotă* (fig. 169).

Aria zonei sau a calotei se află înmulțind lungimea unui cerc mare al sferei cu înălțimea zonei sau calotei. Înălțimea zonei (calotei) este distanța dintre cele două plane de secțiune $O'O''$.

Volume

Volumul prismei (cilindrului) este produsul dintre aria bazei și înălțime.

$$\boxed{V = B \cdot I} \text{ (prismă)}, \quad \boxed{V = \pi R^2 \cdot I} \text{ (cilindru)}.$$

Volumul piramidei (conului) este a treia parte din volumul prismei (cilindrului) care are aceeași bază și aceeași înălțime cu piramida (conul).

$$\boxed{V = \frac{B \cdot I}{3}} \text{ (piramidă)}, \quad \boxed{V = \frac{\pi R^2 I}{3}} \text{ (con)}.$$

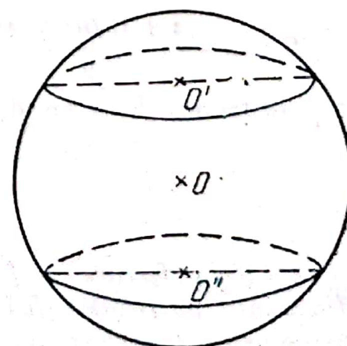


Fig. 169

Volumul trunchiului de piramidă (con) se poate obține scăzînd din volumul piramidei (conului), din care face parte trunchiul, volumul piramidei mici (conului mic) format prin secționare

$$V = V_1 - V_2, \; V = \frac{BI}{3} - \frac{bi}{3}$$

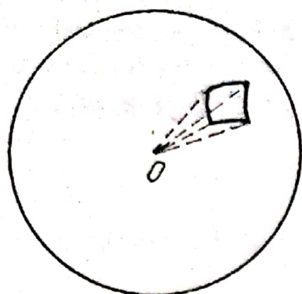


Fig. 170

sau prin formulele:

$$V = \frac{I}{3}\,(B + b + \sqrt{Bb})$$ (trunchiul de piramidă)

$$V = \frac{I\pi}{3}\,(R^2 + r^2 + Rr)$$ (trunchiul de con)

Volumul sferei: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Observare. Ne putem imagina că am introdus în sferă foarte multe piramide cu vîrful în centrul sferei și vîrfurile bazelor pe sferă (fig. 170). Aproximăm volumul sferei prin suma acestor piramide considerînd că suma bazelor este chiar aria sferei și înălțimea piramidelor egală cu raza sferei:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n \cdot V = \frac{R}{3}\,(S_1 + S_2 + \ldots + S_n)$$

$$V = \frac{R}{3} \cdot 4\pi R^2,$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Aplicații

1) *Să se afle raza cercului înscris într-un triunghi în funcție de laturile și aria triunghiului.*

Ducînd bisectoarele AA', BB' și CC' care se întîlnesc în O (fig. 171), triunghiul ABC se împarte în trei triunghiuri cu vîrful în O (triunghiurile OAB, OBC și OCA.

Aceste trei triunghiuri au înălțimile duse din O egale cu raza cercului înscris. Notînd cu S, S_1, S_2, S_3 ariile triunghiurilor ABC, OAB, OBC și OCA avem:

$$S = S_1 + S_2 + S_3, \quad S = \frac{1}{2}\,(AB \cdot r + BC \cdot r + AC \cdot r)$$

$S = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2}$; notînd perimetrul triunghiului cu $2\,p$ obținem $S = rp$ de unde

$$r = \frac{S}{p}.$$

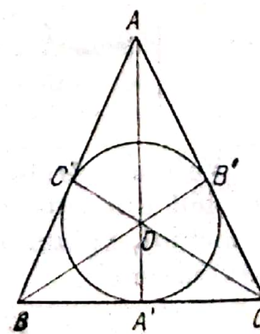


Fig. 171

2) *Prin fiecare vîrf al unui patrulater ducem o paralelă la diagonala patrulaterului care nu trece prin acest vîrf și se formează un nou patrulater. Să se găsească raportul dintre aria patrulaterului dat și aria patrulaterului obținut.*

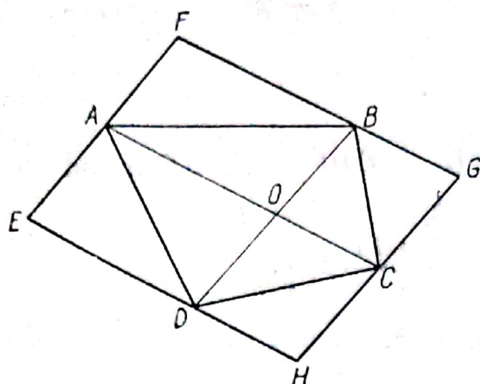


Fig. 172

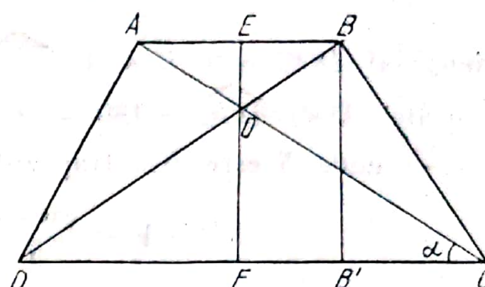


Fig. 173

Fie patrulaterul $ABCD$. Prin A și C ducem paralele la DB, prin B și D ducem paralele la AC; se obține patrulaterul $EFGH$ (fig. 172). Notăm cu O intersecția diagonalelor AC și DB. S-au format patru paralelograme: $OAED$, $OAFB$, $OBGC$, $OCHD$ care sînt împărțite fiecare în cîte două triunghiuri egale de diagonalele AD, AB, BC, DC. Rezultă că

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = \frac{1}{2}.$$

3) *Într-un trapez isoscel diagonalele se intersectează în punctul O. Să se afle:* a) *distanțele de la O la baza mare și la baza mică, știind că aceste distanțe sînt proporționale cu numerele 17 și 7 și că* $\frac{2}{5}$ *din distanța de bază mare întrece cu 4 cm 40% din distanța la baza mică.*

b) *Știind că baza mică este egală cu 14 cm și latura neparalelă cu 26 cm să se afle unghiul pe care-l face diagonala cu baza mare.*

c) *Să se arate că unghiul dintre diagonale are 90°.*

d) *Să se afle volumul piramidei care are baza, trapezul dat iar înălțimea de 40 cm.*

(Examen de admitere cl. a IX-a, sesiunea iunie 1968 București)

a) Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu $b = AB$, $B = CD$ și $AD = BC$. Ducem $OE \perp AB$ și $OF \perp CD$ (fig. 173). Notînd $OE = x$ și $OF = y$, avem relațiile:

$$\frac{y}{17} = \frac{x}{7} \text{ și } \frac{2}{5}\, y - \frac{40}{100}\, x = 4. \text{ Formăm sistemul}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{17}{7}\, x \\ y - x = 10 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y = \dfrac{17}{7}\, x \\ x\left(\dfrac{17}{7} - 1\right) = 10. \end{cases}$$

$$x = 7;\ y = 17.$$

Distanțele la cele două baze sînt $OE = 7$ cm și $OF = 17$ cm.

b) $AB = 14$ cm; $AD = 26$ cm. Notăm cu α unghiul ACD pe care-l încadrăm în triunghiul OFC în care $OF = 17$ deci $\operatorname{tg} \alpha = \frac{17}{FC}$; $FC = \frac{AB}{2} + B'C$ (B' proiecția

vîrfului B pe baza mare). În $\triangle BB'C$ avem $B'C^2 = 26^2 - 24^2 = 50 \cdot 2$, $B'C = 10$ deci $FC = 17$.

$$\text{tg}\alpha = \frac{17}{\ }, \ \alpha = 45°.$$

c) Triunghiul DOC este isoscel $\widehat{\quad} = \widehat{ACD}$ ($\triangle ODF = \triangle OFC$ avînd catetele respectiv egale). Deci $\widehat{DOC} = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$.

d) $V = \frac{S \cdot I}{3}$ unde S este aria trapezului $\left(S = \frac{14 + 34}{2} \cdot 24\right)$.

$$V = \frac{24^2 \cdot 40}{3} = 7680 \text{ cm}^3.$$

4) *Baza unei prisme oblice este un triunghi ABC în care $AB = AC = 3$ cm și $BC = 2$ cm. Muchia laterală, egală cu 4 cm, formează cu planul bazei un unghi de 45°. Să se determine muchia cubului echivalent cu prisma.*

Din C' ducem înălțimea $C'C''$ perpendiculară pe planul bazei (fig. 174). În triunghiul $CC'C''$ avem $CC' = 4$ cm și $\widehat{C'CC''} = 45°$

$$2C'C''^2 = 16, \quad C'C'' = 2\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Pentru a calcula aria bazei calculăm h_a (înălțimea AA''). $AA''^2 = 9 - 1$ $AA'' = \sqrt{8}$, $AA'' = 2\sqrt{2}$.

$$S_{ABC} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

$$V = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \quad , \quad V = 8 \text{ cm}^3.$$

Volumul cubului cu muchia l este 8 cm³.

$$l = \sqrt[3]{8}, \quad l = 2 \text{ cm}.$$

5) *Un paralelipiped drept are laturile $CB = 8$ cm și $BA = 15$ cm. Ele formează un unghi de 60°. Diagonala mică a paralelipipedului formează cu planul bazei un unghi de 30°. Să se calculeze aria laterală și volumul paralelipipedului.*

Baza paralelipipedului este un paralelogram cu laturile AB, BC și $\widehat{ABC} = 60°$ (fig. 175). În triunghiul ABC, ducem $CE \perp AB$, triunghiul CBE are $BE = 4$ cm (cateta care se opune unui unghi de 30° este jumătate din ipotenuză).

$CE^2 = 8^2 - 4^2 = 4 \cdot 12$, $CE = 4\sqrt{3}$. În triunghiul AEC
$AC^2 = 48 + 121 = 169$, $AC = 13$ cm.

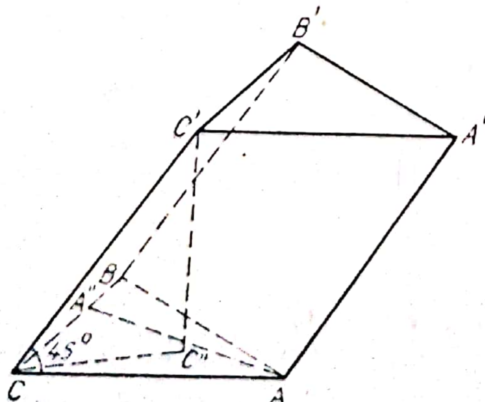


Fig. 174

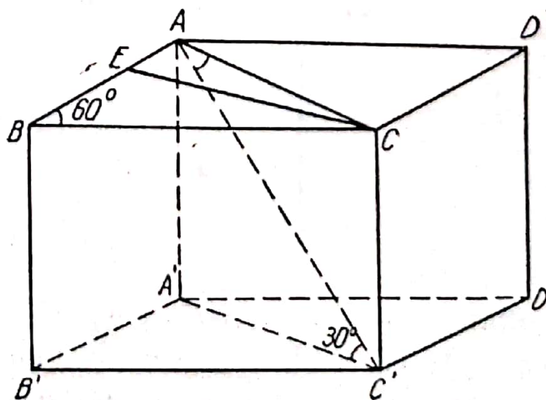


Fig. 175

În triunghiul dreptunghic $C'CA$, $AC = 13$, $\widehat{CAC'} = 30°$

$$CC' = 13 \cdot \operatorname{tg} 30° = 13 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}.$$

Paralelipipedul fiind drept aria laterală este:

$$A_l = 2(8 + 15)\ \frac{13 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{598\sqrt{3}}{3} \approx 344{,}84 \text{ cm}^2;$$

$$V = 780 \text{ cm}^3.$$

6) *Se dă un trapez dreptunghic* ($AB \parallel DC$) *cu latura oblică* $BC = 25$ *cm. Raportul dintre înălţimea trapezului şi baza mică este* $3 : 5$ *iar* $\frac{1}{2}$ *din baza mică întrece cu* 12 *cm* $\frac{1}{3}$ *din înălţime. Să se calculeze:*

a) *lungimea laturilor trapezului,*
b) *volumul corpului obţinut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari,*
c) *aria triunghiului* MBC *unde* M *este mijlocul înălţimii* AD.

Fie trapezul $ABCD$. Notăm înălţimea AD cu i şi bazele trapezului $AB = b$, $CD = B$ (fig. 176).

Se dă: $BC = 25$ cm, $\frac{i}{b} = \frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}b - \frac{1}{3}i = 12$.

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} \frac{i}{b} = \frac{3}{5} \\ \frac{b}{2} - \frac{i}{3} = 12 \end{cases}$ sau $\begin{cases} i = \frac{3}{5}b \\ \frac{b}{2} - \frac{b}{5} = 12. \end{cases}$ $b = 40$, $i = 24$.

Pentru a calcula B (baza mare) ducem $BB' \perp DC$, în $ABCD$ avem:

$$B'C = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{49} = 7, \quad B = 40 + 7 = 47.$$

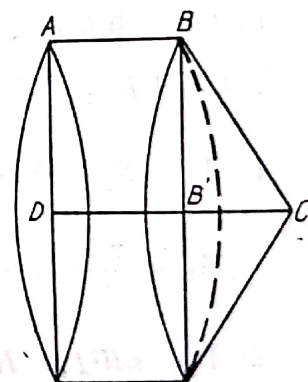


Fig. 176

a) Laturile trapezului sînt: $AB = 40$, $CD = 47$, $AD = 24$, $BC = 25$.

b) Prin rotire se obţine un cilindru, cu generatoarea $AB = 40$ şi raza $AD = 24$, şi un con cu aceeaşi bază, generatoarea $BC = 25$ şi înălţimea $B'C = 7$.

$$V = V_1 + V_2, \quad V = \pi R^2 \cdot DB' + \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot B'C =$$

$$= \frac{\pi R^2}{3}(3DB' + B'C),$$

$$V = \frac{\pi \cdot 24^2}{3}(3 \cdot 40 + 7) = \pi 24 \cdot 8 \cdot 127 = 24\,384\pi \text{ (cm}^3\text{)},$$

$$V = 24\,384\,\pi \text{ cm}^3,$$

$$V \approx 76\,566 \text{ cm}^3.$$

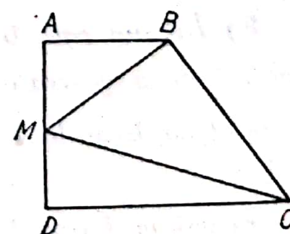


Fig. 177

c) Pe figura 177 observăm că $A_{MBC} = A_{ABCD} - (A_{MAB} + A_{MDC})$

$$A_{MBC} = 12 \cdot 87 - 6 \cdot 87 = 6 \cdot 87 = 522 \text{ cm}^2.$$

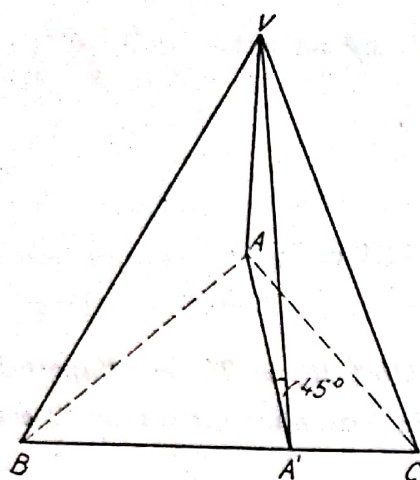


Fig. 178

7) *Se dă piramida triunghiulară VABC cu baza ABC un triunghi dreptunghic cu catetele AB = 16 cm, AC = 12 cm. Știind că muchia laterală VA este perpendiculară pe planul bazei iar fața laterală VBC face cu planul bazei un unghi de 45° să se calculeze:*

a) *volumul piramidei;*
b) *suma muchiilor laterale ale piramidei;*
c) *aria laterală a piramidei;*
d) *volumul cilindrului circumscris piramidei VABC, baza cilindrului fiind cercul circumscris triunghiului ABC.*

Concurs de matematică cl. a VIII-a, București 1968.

În piramida $VABC$, $VA \perp ABC$. Unghiul diedru format de planele VCB și ABC are unghiul plan corespunzător diedrului unghiul format de AA', VA' (înălțimile triunghiurilor ABC și VCB) (fig. 178). În adevăr, din: $VA \perp ABC$ și $AA' \perp CB$ deducem, pe baza teoremei celor trei perpendiculare că $VA' \perp CB$. Deci triunghiul VAA' este dreptunghic isoscel ($\hat{A} = 1$ dr): $VA = AA'$.

$$AA' = \frac{AB \cdot AC}{BC}, \ AB = 16 \text{ cm}, \ AC = 12 \text{ cm}, \ BC = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ cm}.$$

$$AA' = AV = \frac{16 \cdot 12}{20} = \frac{48}{5} = 9{,}6 \text{ cm}.$$

a) $V = \dfrac{B \cdot I}{3}$, $\quad V = 307{,}200 \text{ cm}^3$.

b) $VA = 9{,}6$ cm, $CV = \sqrt{9{,}6^2 + 12^2} \approx 15{,}36$ cm, $VB = \sqrt{9{,}6^2 + 16^2} \approx 18{,}66$ cm

$VA + VB + CV = 9{,}6 + 15{,}36 + 18{,}66 = 43{,}62$ cm.

c) $A_l = S_1 + S_2 + S_3 = \dfrac{VA \cdot AC}{2} + \dfrac{VA \cdot AB}{2} + \dfrac{CB \cdot VA'}{2}$, $VA' = 9{,}6\sqrt{2}$

$$A_l = \frac{9{,}6}{2}(16 + 12) + \frac{20 \cdot 9{,}6}{2}\sqrt{2} \approx 269{,}76 \text{ cm}^2.$$

d) $V = \pi R^2 I$, $\quad R = \dfrac{CB}{2} = 10$, $\quad I = AV = 9{,}6$, $\quad V = 960\pi$.

$$V = 3014{,}400 \text{ cm}^3.$$

8) *Într-un con, înălțimea este cu 2 cm mai mare decît raza, iar tangenta unghiului format de o generatoare cu înălțimea are valoarea $\frac{3}{4}$. Secționînd conul cu un plan paralel cu baza la o distanță de 3 cm față de vîrf, se obține un trunchi de con. Să se afle:*

a) *volumul trunchiului de con;*
b) *aria laterală a trunchiului de con.*

În conul dat notăm cu I şi R respectiv înălţimea şi raza conului, cu α unghiul format de generatoare cu înălţimea. Avem date relaţiile:

$$I - R = 2, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \quad \text{deci} \quad \frac{3}{4} = \frac{R}{I}.$$

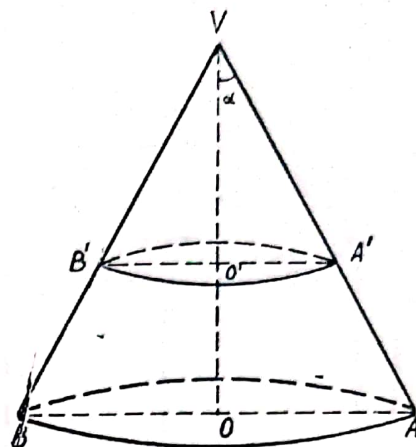


Fig. 179

Formăm sistemul $\begin{cases} I - R = 2 \\ R = \frac{3}{4} I \end{cases}$ sau $\begin{cases} R = \frac{3}{4} I \\ I - \frac{3}{4} I = 2 \end{cases}$

$I = 8, \quad R = 6.$

a) Secţionînd conul cu un plan paralel cu baza la 3 cm de vîrf (fig. 179) avem un trunchi de con în care $R = 6$ cm. Din triunghiul VAB ($A'B' \parallel AB$) obţinem:

$$\frac{VO}{VO'} = \frac{R}{r}, \quad \frac{8}{3} = \frac{6}{r}, \quad r = \frac{9}{4} = 2{,}25 \text{ cm}, \quad I = 8 - 3 = 5 \text{ cm}.$$

$$V = \frac{\pi I}{3}(R^2 + r^2 + Rr), \quad V = \frac{5\pi}{3}(5{,}0625 + 36 + 13{,}50) = 90{,}94\,\pi \text{ cm}^3.$$

b) Notînd cu G_1 generatoarea trunchiului, din trapezul dreptunghic $OA'AO$ în care $O'A' = \frac{9}{4}$, $OA = 6$, $OO' = 5$ obţinem

$$G_1^2 = 25 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{625}{16}, \quad G_1 = 6{,}25 \text{ cm}.$$

$$A_l = \pi \cdot \frac{25}{4} \cdot 8{,}25 \approx 161{,}90 \text{ cm}^2.$$

IX
Secţiuni plane

Pentru rezolvarea celor mai multe probleme din geometria în spaţiu, căutăm să stabilim cea mai convenabilă secţiune cu un plan astfel încît să reducem problema dată la o problemă de geometrie plană.

De exemplu, pentru a găsi relaţiile între elementele unei piramide, con, trunchi de con, trunchi de piramidă, ducem un plan de secţiune (planul determinat de înălţime şi muchie, sau de înălţime şi apotemă ş.a.m.d.).

Exemple

1) *Să se calculeze aria sferei circumscrise unei piramide triunghiulare regulate cu feţele triunghiuri echilaterale (tetraedrul regulat) cu latura a.*

Fie tetraedrul $VABC$ (fig. 180). Notăm cu R raza sferei circumscrise tetraedrului regulat cu latura a. Considerăm planul determinat de înălţimea VO a tetraedrului şi muchia VA. Acest plan taie sfera după un cerc mare cu diametrul VV'. În acest plan triunghiul $VV'A$ este dreptunghic în A (înscris într-un semicerc) deci: $VA^2 = VV' \cdot VO$ (VV' este diametrul sferei iar VO este înălţimea tetraedrului). Dar $OA = r$ (raza cercului circumscris triunghiului ABC) deci $OA = \frac{a}{\sqrt{3}}$ şi

$$VO^2 = a^2 - \frac{a^2}{3}, \quad VO = \sqrt{\frac{2a^2}{3}}, \quad VO = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a.$$

$$a^2 = 2R\sqrt{\frac{2}{3}}\,a, \quad R = \frac{a}{2\sqrt{\frac{2}{3}}}, \quad R = \frac{\sqrt{6}a}{4}.$$

2) *Să se calculeze latura unui cub înscris într-o sferă de rază R.*

Cubul are bazele paralele şi egale, planele lor sînt simetrice faţă de centrul sferei. Ele taie sfera după două cercuri egale circumscrise pătratelor de bază (fig. 181).

Ducînd planul secţiunii diagonale în cub, acesta taie cele două plane paralele ale bazelor după două drepte paralele AC şi $A'C'$; AC' este diametrul sferei iar $AC = a\sqrt{2}$.

$$4R^2 = a^2 + 2a^2, \quad 4R^2 = 3a^2, \quad a = \frac{2\sqrt{3}\,R}{3}.$$

3) *Baza unei prisme drepte $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ este un trapez isoscel $ABCD$ cu laturile $AB = CD = 13$ cm; $BC = 11$ cm şi $AD = 21$ cm. Aria secţiunii diagonale este egală cu 180 cm². Să se calculeze* a) *aria totală*; b) *volumul*; c) *aria secţiunii* A, B_1, C_1, D.

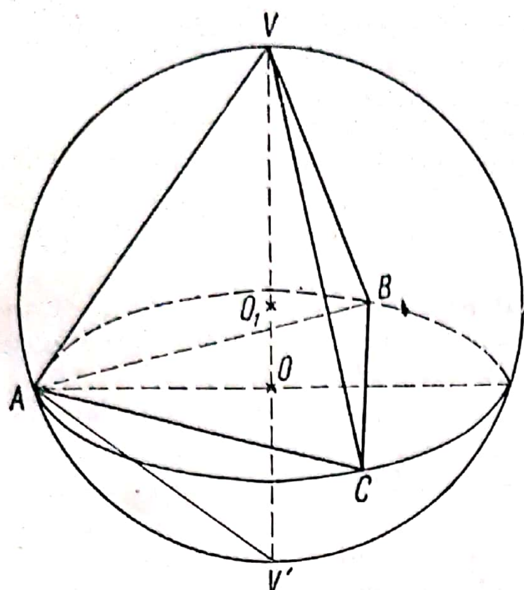


Fig. 180

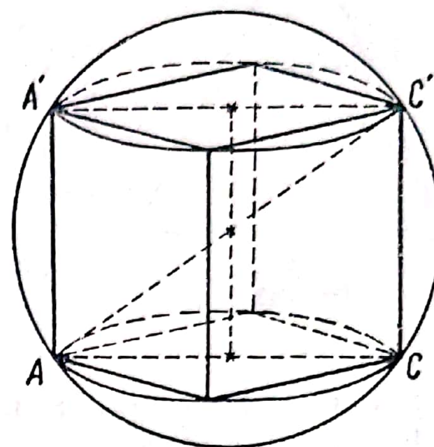


Fig. 181

Pentru a calcula aria și volumul trebuie să calculăm înălțimea prismei. Pentru a calcula înălțimea prismei folosim aria secțiunii diagonale (fig. 182). Secțiunea diagonală este determinată de planul care trece prin diagonalele bazelor $AC \parallel A_1C_1$. Acest plan secționează prisma după paralelogramul ACC_1A_1 (muchiile AA_1 și CC_1 sînt paralele și egale), AA_1C_1C este dreptunghi și aria lui este

1) $A_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC$.

Diagonala AC a trapezului se calculează din $\triangle ACE$ unde CE este înălțimea trapezului isoscel $ABCD$. În $\triangle CED$ avem:

$$CE^2 = CD^2 - ED^2 = 13^2 - 5^2 = 18 \cdot 8 = 9 \cdot 16, \; CE = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}.$$

În $\triangle ACE : AC^2 = 16^2 + 12^2 = 400, \qquad AC = 20$ cm

Înlocuind în (1) elementele cunoscute avem:

2) $180 = 20 \cdot AA_1, \qquad AA_1 = 9$ cm.

a) Aria totală a prismei: $A_t = (21 + 26 + 11) \cdot 9 + (21 + 11)12 = 906 \text{ cm}^2$.
b) Volumul prismei: $V = 192 \cdot 9 = 1728 \text{ cm}^3$.
c) Patrulaterul AB_1C_1D este trapez: $AD \parallel B_1C_1$ (ambele paralele cu BC). Cum $AB_1 = DC_1$ (diagonale în dreptunghiuri egale), AB_1C_1D este trapez isoscel. Pentru a calcula aria trapezului AB_1C_1D trebuie să-i calculăm înălțimea.

$C_1E \perp AD$ (teorema celor trei perpendiculare) deci C_1E este înălțimea trapezului ADC_1B_1.

În triunghiul C_1CE dreptunghic în C, avem:

$$C_1E^2 = CC_1^2 + CE^2,$$

$$C_1E^2 = 81 + 144 = 225, \qquad C_1E = 15 \text{ cm}.$$

$$S_{AB_1C_1D} = \frac{21 + 11}{2} \cdot 15 = 16 \cdot 15, \qquad S_{AB_1C_1D} = 240 \text{ cm}^2.$$

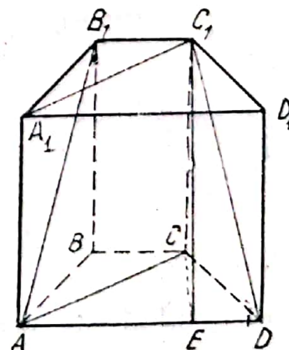


Fig. 182

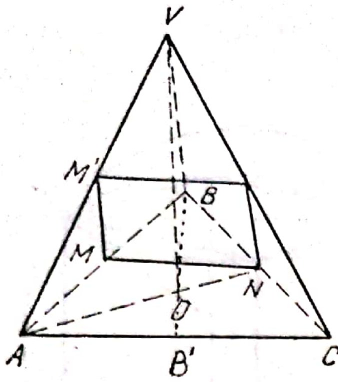


Fig. 183

4) *În piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu latura bazei a și muchia laterală b se duce prin mijloacele laturilor AB și BC ale bazei un plan paralel cu muchia VB. Să se determine forma și aria secțiunii obținute.*

Notăm cu M și N mijloacele laturilor AB și BC (fig. 183) $MN \parallel AC$ (linie mijlocie în $\triangle ABC$) deci $MN \parallel VAC$. Planul de secțiune intersectează fața VAC după o dreaptă $M'N' \parallel AC$ deci $M'N' \parallel MN$.

Planul de secțiune fiind paralel cu VB înseamnă că el va intersecta planele VBC și VBA după două drepte paralele cu BV. $NN' \parallel BV$ și $MM' \parallel BV$ deci $MM' \parallel NN'$.

Patrulaterul $MM'NN'$ este paralelogram cu laturile

$$MM' = NN' = \frac{b}{2}, \quad MN = M'N' = \frac{a}{2}.$$

Dar $AC \perp BV$ pentru că AC este perpendiculară pe planul determinat de VB și înălțimea BB' a triunghiului echilateral ABC. În adevăr, dacă ducem VO înălțimea piramidei, ea se găsește în planul VBB'. Avem: $AC \perp BB'$ și $AC \perp VO$. Rezultă

$$AC \perp VBB' \quad \text{deci} \quad AC \perp BV.$$

Paralelele la AC și BV respectiv MN și MN' sînt și ele perpendiculare. Paralelogramul $MM'N'N$ avînd un unghi drept este dreptunghi.

$$S_{MNN'M'} = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}.$$

5) *Un paralelipiped drept $ABCDA'B'C'D'$ are baza un pătrat cu latura $AB = a$ și înălțimea $AA' = 2a$. În planul $BCC'B'$ se duce o semidreaptă BE care face cu BC un unghi de 45° ($E \in CC'$) iar în planul $ABB'A'$ o semidreaptă BF care face cu AB un unghi de 45° ($F \in AA'$).*

a) *Să se demonstreze că planul determinat de dreptele BE și BF taie paralelipipedul după un romb.*

b) *Să se afle aria rombului.*

c) *Să se calculeze unghiurile rombului.*

a) Planul determinat de punctele BEF taie (fig. 184) planele $D'C'CD$ și $ABA'B'$ după drepte paralele. Paralela din E la FB trece prin D' simetricul lui B față de mijlocul lui EF ($BF \parallel ED'$) analog: $D'F \parallel BE$ deci secțiunea este un paralelogram, $EB = FB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ deci secțiunea este un romb.

b) $A = \dfrac{EF \cdot BD'}{2}$ dar $EF = AC = a\sqrt{2}$ și BD' diagonala paralelipipedului este $BD' = a\sqrt{6}$ ($BD'^2 = BD^2 + DD'^2$) deci

$$A = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{6}}{2} = a^2\sqrt{3}.$$

c) Rombul este format din triunghiurile echilaterale FEB și $FD'E$ deci $\hat{B} = \hat{D}' = 60°$, $\hat{E} = \hat{F} = 120°$.

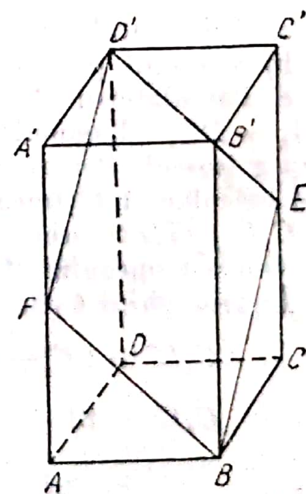


Fig. 184

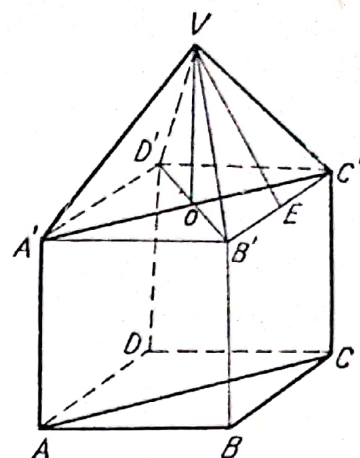


Fig. 185

Observare. Dacă $AA' = a$, atunci planul de secțiune este determinat de dreptele BC', BA' deci secțiunea în acest caz este un triunghi echilateral (paralelipipedul este un cub). Dacă $AA' < a$ dreptele BE și BF intersectează muchiile CC' și AA' în afara paralelipipedului. În acest caz planul de secțiune este un triunghi isoscel $BE'F'$ unde E' și F' sînt punctele în care BE și BF intersectează muchiile $A'B'$ și $B'C'$. Dacă $AA' > 2a$ planul taie muchia DD' într-un punct G situat între D și D' (G este simetricul lui B față de mijlocul segmentului EF); secțiunea este un romb.

6) *O piesă este formată dintr-un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu latura $2a$ terminat cu o piramidă regulată $VA'B'C'D'$ a cărei apotemă este egală cu latura cubului (V, vîrful piramidei).*

Să se calculeze:

1) *aria laterală și totală a piesei;* 2) *volumul piesei;* 3) *aria secțiunii făcute în piesă de un plan ce trece prin punctele V, A și C;* 4) *înălțimea unei prisme care are același volum cu piramida $VA'B'C'D'$ și a cărei bază este egală cu pătratul obținut prin unirea mijloacelor laturilor pătratului $ABCD$.*

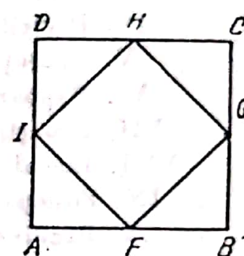


Fig. 186

(Concursul de matematică, cl. a VIII-a, etapa locală, București, 1969).

1) Notînd cu E mijlocul laturii $B'C'$ (fig. 185); apotema piramidei $VE = 2a$; $A_l = 16a^2 + 8a^2 = 24a^2$, $A_t = 24a^2 + 4a^2 = 28a^2$.

2) Pentru a calcula volumul calculăm înălțimea VO a piramidei; $VO = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$,

$$V = 8a^3 + \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3 = \frac{4a^3}{3}(6 + \sqrt{3}).$$

3) Planul de secțiune determinat de punctele V, A și C taie cubul după dreptunghiul $ACC'A'$ (planele paralele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ sînt intersectate de planul VAC după segmentele paralele și egale: $AC \underline{\parallel} A'C'$, $AA' \perp AC$) și piramida după triunghiul $VA'C'$. Secțiunea este formată de un dreptunghi și un triunghi construit pe o latură a dreptunghiului: $A'C' = 2\sqrt{2}a$ ($A'C'^2 = 4a^2 + 4a^2 = 8a^2$), înălțimea dreptunghiului $AA' = 2a$, înălțimea triunghiului, $VO = a\sqrt{3}$.

$$A_{\text{secțiunii}} = 4\sqrt{2}\,a^2 + \frac{2\sqrt{2}\cdot a\sqrt{3}\cdot a}{2} = \sqrt{2}\,a^2(4 + \sqrt{3}).$$

4) Fie $FGHI$ pătratul obținut prin unirea mijloacelor laturilor pătratului $ABCD$. Patrulaterul $FGHI$ este pătrat avînd toate laturile egale ($FG = GH = HI = IF = a\sqrt{2}$) și unghiurile drepte (fig. 186).

$$V = (a\sqrt{2})^2 \cdot I.$$

$$\frac{4\sqrt{3}\,a^3}{3} = 2a^2\,I; \qquad I = \frac{2\sqrt{3}\,a}{3}.$$

CUPRINS

ARITMETICĂ ȘI ALGEBRĂ

GEOMETRIE

Nr. Colilor de tipar : 18,50

Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.
com. 411/1373